Dr. Marc Nardmann
Dipl.-Math. Benedict Meinke
M. Sc. Christoph Bärligea

Übungsblatt 2

Abgabe der Lösungen: 10. 11. 2015

Aufgabe 5. (7 + 5 Punkte)

(a) μ sei ein Inhalt auf einem Ring $\mathscr{R}$ auf einer Menge X, und $\mathscr{M}$ sei eine abzählbare Menge von paarweise disjunkten Elementen von $\mathscr{R}$ mit $\bigcup \mathscr{M} \in \mathscr{R}$. Beweisen Sie:

$$\mu\big(\bigcup \mathscr{M}\big) \geq \sum_{A\in\mathscr{M}} \mu(A).$$

(b) Beweisen Sie, dass $\mathscr{R} := \{A \subseteq \mathbb{Z} \mid A \text{ oder } \mathbb{Z}\setminus A \text{ ist endlich}\}$ ein Ring auf $\mathbb{Z}$ ist und dass die Abbildung $\mu\colon \mathscr{R} \to [0,\infty]$ mit

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & \text{falls } A \text{ endlich ist} \\ \infty & \text{falls } A \text{ unendlich ist} \end{cases}$$

ein Inhalt auf $\mathscr{R}$, aber kein Prämaß auf $\mathscr{R}$ ist.

Aufgabe 6. (10 Punkte)

$\mathscr{R}$ sei ein Ring auf einer Menge X. Beweisen Sie, dass $\mathscr{R}$ bezüglich der Addition $+\colon \mathscr{R} \times \mathscr{R} \to \mathfrak{P}(X)$ mit

$$A + B := (A\setminus B) \cup (B\setminus A)$$

und der skalaren Multiplikation $\cdot\colon \mathbb{F}_2 \times \mathscr{R} \to \mathfrak{P}(X)$ mit

$$0 \cdot A := \varnothing, \qquad 1 \cdot A := A$$

ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$ ist. Folgern Sie daraus, dass die Kardinalität von $\mathscr{R}$ die Form 2^n mit $n \in \mathbb{N}$ hat, falls $\mathscr{R}$ endlich ist.

Bemerkung. Aussagen, die in der Vorlesung oder im Tutorium nur behauptet aber nicht bewiesen wurden, sind hier noch zu überprüfen.

Aufgabe 7. (12 Punkte)

μ sei ein Prämaß auf einem Ring $\mathscr{R}$ auf einer Menge X. Beweisen Sie:

(a) Für jede monoton wachsende (d.h. $\forall i \in \mathbb{N}\colon A_i \subseteq A_{i+1}$) Folge $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $\mathscr{R}$ mit $\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i \in \mathscr{R}$ gilt

$$\lim_{i\to\infty} \mu(A_i) = \mu\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} A_i\right).$$

(b) Für jede monoton fallende (d.h. $\forall i \in \mathbb{N}\colon A_i \supseteq A_{i+1}$) Folge $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $\mathscr{R}$ mit $\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i \in \mathscr{R}$ und $\mu(A_0) < \infty$ gilt

$$\lim_{i\to\infty} \mu(A_i) = \mu\left(\bigcap_{i=0}^{\infty} A_i\right).$$

... weiter auf der nächsten Seite!

Dr. Marc Nardmann
Dipl.-Math. Benedict Meinke
M. Sc. Christoph Bärligea

Aufgabe 8. (6 Punkte)

Es sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Beweisen Sie: Die Abbildung $\mu\colon \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,\infty]$ mit

$$\mu(A) := \begin{cases} 0 & \text{falls } A = \varnothing \\ 2 & \text{falls } A \neq \varnothing \text{ beschränkt ist} \\ \infty & \text{falls } A \text{ unbeschränkt ist} \end{cases}$$

ist ein äußeres Maß auf $\mathbb{R}^n$, aber kein Maß.