Dr. Marc Nardmann
Dipl.-Math. Benedict Meinke
M. Sc. Christoph Bärligea

Übungsblatt 6

Abgabe der Lösungen: 8. 12. 2015

Da in der Vorlesung noch nicht diskutiert wurde, in welcher Beziehung das Lebesgue-Integral zu dem Integral steht, das Sie aus Analysis I und II kennen, dürfen auf diesem Blatt zur Berechnung von Lebesgue-Integralen nur Regeln verwendet werden, die bisher in unserer Vorlesung vorkamen!

Aufgabe 20. (8 Punkte)

Zeigen Sie (z.B. mit der Hölder-Ungleichung) folgende Verallgemeinerung der Hölder-Ungleichung: *$(X,\mathscr{A},\mu)$ sei ein Maßraum, es seien $k\in\mathbb{N}_{\geq 1}$ und $r,p_1,\dots,p_k\in[1,\infty]$ mit $\sum_{i=1}^k \frac{1}{p_i}=\frac{1}{r}$. Dann gilt für alle $\mathscr{A}$-messbaren Funktionen $f_1,\dots,f_k\colon X\to\mathbb{R}$:*

$$\|f_1\cdots f_k\|_{L^r}\leq \|f_1\|_{L^{p_1}}\cdots\|f_k\|_{L^{p_k}}\,.$$

Aufgabe 21. (3 + 3 Punkte)

(a) Beweisen Sie, dass für alle $p\in[1,\infty]$ und alle Folgen $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ gilt:

$$\left(\sum_{i\in\mathbb{N}}|a_i+b_i|^p\right)^{1/p}\leq\left(\sum_{i\in\mathbb{N}}|a_i|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i\in\mathbb{N}}|b_i|^p\right)^{1/p}. \tag{1}$$

(b) Geben Sie für jedes $p\in\,]0,1[$ Folgen $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, $(b_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ an, sodass (1) falsch ist.

Aufgabe 22. (10 Punkte)

Beweisen Sie, dass der Grenzwert $\lim_{k\to\infty}\int_{[0,1]}\left(1+\frac{x}{k}\right)^k \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}\lambda_1(x)$ existiert und berechnen Sie ihn.

Aufgabe 23. (3 + 3 + 4 + 6 Punkte)

(a) X sei eine Menge. Es sei $x\in X$. Beweisen Sie, dass die durch

$$\delta_x(A):=\begin{cases}1 & \text{falls } x\in A\\ 0 & \text{sonst}\end{cases}$$

definierte Abbildung $\delta_x\colon\mathfrak{P}(X)\to\mathbb{R}_{\geq 0}$ ein Maß ist.

(b) I sei eine Menge, $(X,\mathscr{A})$ sei ein messbarer Raum, $(r_i)_{i\in I}$ sei eine Familie in $[0,\infty]$, $(\mu_i)_{i\in I}$ sei eine Familie von Maßen auf $\mathscr{A}$. Beweisen Sie, dass $\sum_{i\in I} r_i\mu_i$ ein Maß auf $\mathscr{A}$ ist.

(c) Zeigen Sie, dass die durch $f(t):=t-1$ gegebene Funktion $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ Lebesgue-integrierbar ist (d.h. integrierbar bezüglich der hier relevanten Einschränkung von λ_1) und berechnen Sie $\int_{[0,1]}(t-1)\,\mathrm{d}\lambda_1(t)$.

(d) Zeigen Sie für das Maß $\mu:=3\lambda_1+5\delta_1\big|_{\mathscr{L}(\mathbb{R})}$, dass die durch $f(t):=3t^2-7$ gegebene Funktion $f\colon[-1,2]\to\mathbb{R}$ μ-integrierbar ist und berechnen Sie $\int_{[-1,2]}\left(3t^2-7\right)\mathrm{d}\mu(t)$.

(*Hinweis.* Vermutlich kennen Sie die Formel $\sum_{i=1}^n i^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ aus früheren Vorlesungen. Sie dürfen sie ohne Beweis verwenden.)