Übungsblatt 1

Analysis III, WiSe 2018/2019

Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

Ausgabe: Di., 16.10.2018, Abgabe: Di., 23.10.2018

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

B **Aufgabe 1:** (σ-Algebren, $2+2$ Punkte)
Seien $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ und $\mathcal{E} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}\} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$.

a) Bestimmen Sie $\sigma(\mathcal{E})$.

b) Geben Sie zwei σ-Algebren $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ an, für die $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ keine σ-Algebra ist.

B **Aufgabe 2:** (σ-Algebren, $4+4$ Punkte)
Seien Ω eine Menge, $\mathcal{A} = \{A \subseteq \Omega : A \text{ oder } A^c \text{ ist abzählbar}\} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ und $\mathcal{E} = \{\{\omega\} : \omega \in \Omega\}$. Zeigen Sie:

a) $\mathcal{A}$ ist eine σ-Algebra.

b) $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{E})$.

B **Aufgabe 3:** (Borel-σ-Algebra auf $\mathbb{R}^n$, 6 Punkte)
Sei $\mathcal{M}_4 := \{(x, y] : x, y \in \mathbb{Q}^n,\ x_j < y_j \text{ für } j = 1, \dots, n\}$. Zeigen Sie, dass $\sigma(\mathcal{M}_4) = \mathcal{B}_n$.

Hinweis: Sie können verwenden, dass $\mathcal{B}_n = \sigma(\mathcal{M}_3)$; vgl. Lemma 2.12.
Bemerkung 2.2 (a) und Lemma 2.8 (5) können ebenfalls hilfreich sein.

Aufgabe 4: (Dynkin-Systeme)
Seien Ω eine Menge und $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Zeigen Sie:

a) $\delta(\mathcal{E})$ ist ein Dynkin-System mit $\delta(\mathcal{E}) \subseteq \sigma(\mathcal{E})$.

b) $\mathcal{E}$ ist genau dann ein Dynkin-System, wenn $\mathcal{E} = \delta(\mathcal{E})$.

Präsenzaufgaben

Analysis III, WiSe 2018/2019

Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Bearbeitung: Mi./Do., 17./18.10.2018

Aufgabe 1: (Dynkin-Systeme)
Seien $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ und $\mathcal{E} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}\} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$.

a) Bestimmen Sie $\delta(\mathcal{E})$.

b) Geben Sie ein Dynkin-System $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ an, das keine Algebra bzw. σ-Algebra ist.

Aufgabe 2: (Algebren und σ-Algebren)
Seien Ω eine Menge und $\mathcal{A} = \{A \subseteq \Omega : A \text{ oder } A^c \text{ ist endlich}\} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Zeigen Sie:

a) $\mathcal{A}$ ist eine Algebra.

b) $\mathcal{A}$ ist genau dann eine σ-Algebra, wenn Ω endlich ist.

Aufgabe 3: (Borel-σ-Algebra auf $\mathbb{R}^n$)
Sei $\mathcal{M}_5 := \{(-\infty, x] : x \in \mathbb{Q}^n\}$. Zeigen Sie, dass $\sigma(\mathcal{M}_5) = \mathcal{B}_n$.

Hinweis: Sie können verwenden, dass $\mathcal{B}_n = \sigma(\mathcal{M}_4)$; vgl. Lemma 2.12.
Bemerkung 2.2 (a) und Lemma 2.8 (5) können ebenfalls hilfreich sein.