Übungsblatt 2

Analysis III, WiSe 2018/2019

Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

Ausgabe: Di., 23.10.2018, Abgabe: Di., 30.10.2018

B **Aufgabe 1:** (Maßräume, $4+2$ Punkte)
Seien $(\Omega,\, \mathcal{A},\, \mu)$ ein Maßraum und $B \in \mathcal{A}$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}_B := \{\, A \cap B \;:\; A \in \mathcal{A} \,\}$ eine σ-Algebra über B ist.

b) Zeigen Sie, dass durch $\mu_B : \mathcal{A}_B \longrightarrow [0,\, \infty]$ mit $\mu_B(C) = \mu(C)$ für $C \in \mathcal{A}_B$ ein Maß auf $(B,\, \mathcal{A}_B)$ gegeben ist.

B **Aufgabe 2:** (Maßräume, $3+3$ Punkte)
Seien Ω eine unendliche Menge, $\mathcal{A} = \{\, A \subseteq \Omega \;:\; A \text{ oder } A^c \text{ ist endlich} \,\} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ die Algebra der (co-) endlichen Mengen und $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0,\, \infty]$ gegeben als $\mu(A) = 0$ für endliches $A \in \mathcal{A}$ und $\mu(A) = 1$ sonst.

a) Zeigen Sie, dass μ eine (endlich) additive Mengenfunktion auf $\mathcal{A}$ mit $\mu(\varnothing) = 0$ ist.

b) Zeigen Sie, dass μ sich nicht zu einem Maß auf $\sigma(\mathcal{A})$ fortsetzen lässt, wenn Ω abzählbar ist.

Hinweis: Nach Präsenzaufgabe 1.2 ist $\mathcal{A}$ eine Algebra mit $\mathcal{A} \subsetneq \sigma(\mathcal{A})$.

B **Aufgabe 3:** (Maße, $4+2$ Punkte)
Sei $(\Omega,\, \mathcal{A})$ ein Messraum.

a) Zeigen Sie, dass durch jede endliche, endlich additive und von oben stetige Mengenfunktion $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0,\, \infty]$ ein Maß auf $(\Omega,\, \mathcal{A})$ gegeben ist.

b) Beweisen oder widerlegen Sie: In a) kann auf die Forderung der Endlichkeit von μ verzichtet werden.

Aufgabe 4: (Borel-σ-Algebren)
Für einen metrischen Raum $(X,\, d)$ sei $\mathcal{B}(X,\, d)$ die zugehörige Borel-σ-Algebra.

a) Seien X eine Menge und $d,\, d'$ zwei äquivalente Metriken auf X. Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}(X,\, d) = \mathcal{B}(X,\, d')$.

b) Geben Sie eine Metrik d auf $\mathbb{R}$ an, so dass $\mathcal{B}(\mathbb{R},\, d) \neq \mathcal{B}_1$.

Hinweis: Sie können für Teil b) verwenden, dass $\mathcal{B}_1 \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Präsenzaufgaben

Analysis III, WiSe 2018/2019

Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Bearbeitung: Mi./Do., 24./25.10.2018

Aufgabe 1: (Zählmaße)
Seien Ω eine Menge, $M \subseteq \Omega$ und das Zählmaß $\mu_M : \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0,\ \infty]$ gegeben als $\mu_M(A) = |A \cap M|$ für jede Menge $A \subseteq \Omega$, für die $A \cap M$ endlich ist, und $\mu_M(A) = \infty$ sonst.

a) Zeigen Sie, dass durch μ_M ein Maß auf $(\Omega,\ \mathcal{P}(\Omega))$ gegeben ist. Ist $(\Omega,\ \mathcal{P}(\Omega),\ \mu_M)$ vollständig?

b) Zeigen Sie, dass μ_M genau dann σ-endlich ist, wenn M abzählbar ist.

Aufgabe 2: (Zählmaße)
Sei $(\Omega,\ \mathcal{A})$ ein Messraum.

a) Zeigen Sie, dass für $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq [0,\ \infty]$ und eine Folge von Maßen $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ auf $(\Omega,\ \mathcal{A})$ durch $\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \mu_k$ ein Maß auf $(\Omega,\ \mathcal{A})$ gegeben ist.

b) Stellen Sie für den Fall $(\Omega,\ \mathcal{A}) = (\mathbb{N},\ \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ einen Zusammenhang zwischen dem Zählmaß $\mu_{\mathbb{N}}$ und der Folge von Dirac-Maßen $(\delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ her.

Aufgabe 3: (Maßräume)
Seien Ω eine überabzählbare Menge, $\mathcal{A} = \{\, A \subseteq \Omega\ :\ A \text{ oder } A^c \text{ ist abzählbar} \,\} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ die σ-Algebra der (co-)abzählbaren Mengen und $\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0,\ \infty]$ gegeben als $\mu(A) = 0$ für abzählbares $A \in \mathcal{A}$ und $\mu(A) = \infty$ sonst.

a) Zeigen Sie, dass durch μ ein Maß auf $(\Omega,\ \mathcal{A})$ gegeben ist.

b) Zeigen Sie, dass $(\Omega,\ \mathcal{A},\ \mu)$ ein vollständiger Maßraum ist.

Hinweis: Nach Übungsaufgabe 1.2 ist $\mathcal{A}$ tatsächlich eine σ-Algebra über Ω.

Aufgabe 4: (Maßräume)
Sei $(\Omega,\ \mathcal{A},\ \mu)$ ein Maßraum. Zeigen Sie, dass μ σ-subadditiv auf $\mathcal{A}$ ist.

Hinweis: Dies ist die Aussage (6) von Lemma 3.4.
Die Aussagen (1)–(5) von Lemma 3.4 können zum Beweis verwendet werden.