Übungsblatt 3

Analysis III, WiSe 2018/2019

Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Ausgabe: Di., 30.10.2018, Abgabe: Di., 06.11.2018

B **Aufgabe 1:** (Maße, 4 Punkte)
Seien $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Maßen auf $(\Omega, \mathcal{A})$ mit $\mu_k(A) \leq \mu_{k+1}(A)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und alle $A \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass durch

$$\mu : \mathcal{A} \longrightarrow [0, \infty], \qquad \mu(A) = \lim_{k\to\infty} \mu_k(A), \qquad A \in \mathcal{A},$$

ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ gegeben ist.

B **Aufgabe 2:** (Vervollständigung von Maßräumen, $3+3$ Punkte)
Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(\Omega, \bar{\mathcal{A}}_\mu, \bar{\mu})$ seine minimale Vervollständigung gemäß Satz 3.8. Weiterhin seien

$$\mathcal{B} = \Big\{ B \subseteq \Omega \quad : \quad \exists\, E,\, F \in \mathcal{A} : E \subseteq B \subseteq F,\ \mu(F \setminus E) = 0 \Big\}$$

sowie $\nu : \mathcal{B} \longrightarrow [0, \infty]$ gegeben durch $\nu(B) = \sup\{\, \mu(A) \,:\, A \in \mathcal{A},\ A \subseteq B \,\}$ für $B \in \mathcal{B}$.

a) Zeigen Sie, dass $\bar{\mathcal{A}}_\mu = \mathcal{B}$.

b) Zeigen Sie, dass $\bar{\mu} = \nu$.

B **Aufgabe 3:** (Semi-Ringe, $4+4$ Punkte)
Seien Ω und Ω' Mengen und $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{P}(\Omega')$ Semi-Ringe. Seien weiterhin $\mu : \mathcal{S} \longrightarrow [0, \infty]$ und $\mu' : \mathcal{S}' \longrightarrow [0, \infty]$ endlich additiv mit $\mu(\varnothing) = \mu'(\varnothing) = 0$.

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{S} \times \mathcal{S}' = \{\, A \times A' \,:\, A \in \mathcal{S},\ A' \in \mathcal{S}' \,\} \subseteq \mathcal{P}(\Omega \times \Omega')$ ein Semi-Ring ist.

b) Zeigen Sie, dass durch $(\mu \times \mu')(A \times A') = \mu(A) \cdot \mu'(A')$ für $A \in \mathcal{S}$ und $A' \in \mathcal{S}'$ eine endlich additive Mengenfunktion $\mu \times \mu' : \mathcal{S} \times \mathcal{S}' \longrightarrow [0, \infty]$ gegeben ist mit $(\mu \times \mu')(\varnothing) = 0$.

Hinweise: Sie können für Teil b) die Präsenzaufgabe 1 verwenden.
Für die Definition von $\mu \times \mu'$ sei $0 \cdot \infty := 0$ und $a \cdot \infty := \infty$ für $0 < a \leq \infty$.

Aufgabe 4: (Semi-Ringe)
Seien Ω eine Menge, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ein Semi-Ring und $\mu : \mathcal{S} \longrightarrow [0, \infty]$ endlich additiv mit $\mu(\varnothing) = 0$. Zeigen Sie:

a) Zu $A, A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{S}$ existieren paarweise disjunkte Mengen $C_1, \ldots, C_m \in \mathcal{S}$ so, dass

$$A \setminus \bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{k=1}^{m} C_k.$$

b) Sind $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{S}$ paarweise disjunkt und ist $A \in \mathcal{S}$ mit $\bigcup_{k=1}^n A_k \subseteq A$, so ist $\sum_{k=1}^n \mu(A_k) \leq \mu(A)$.

c) Sind $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{S}$ und ist $A \in \mathcal{S}$ mit $A \subseteq \bigcup_{k=1}^n A_k$, so ist $\mu(A) \leq \sum_{k=1}^n \mu(A_k)$.

Präsenzaufgaben

Analysis III, WiSe 2018/2019

Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Bearbeitung: Mi., 31.10.2018

Aufgabe 1: (Semi-Ringe)
Seien Ω eine Menge, $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ein Semi-Ring und $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{S}$. Zeigen Sie, dass paarweise disjunkte Mengen $B_1, \ldots, B_m \in \mathcal{S}$ existieren, so dass jede der Mengen A_k die Vereinigung gewisser B_j ist.

Hinweis: Sie können Übungsaufgabe 4 a) verwenden.

Aufgabe 2: (Semi-Ringe über $\mathbb{R}^n$)
Betrachten Sie die Mengensysteme

$$J_n := \Big\{ (x, y) \;:\; x, y \in \mathbb{R}^n,\; x_j \leq y_j \text{ für } j = 1, \ldots, n \Big\},\; I_n := \Big\{ (x, y] \;:\; x, y \in \mathbb{R}^n,\; x_j \leq y_j \text{ für } j = 1, \ldots, n \Big\}$$

und zeigen Sie:

a) Es gilt $\sigma(I_n) = \sigma(J_n)$.

b) I_n ist ein Semi-Ring mit $\sigma(I_n) = \mathcal{B}_n$.

Hinweise: Für Teil a) vgl. den Beweis von $\sigma(\mathcal{M}_3) = \sigma(\mathcal{M}_4)$ in Übungsaufgabe 1.3.
Für Teil b) beachte Übungsaufgabe 3 a) und, dass $\mathcal{M}_4 \subseteq I_n$ und $J_n \subseteq \mathcal{O}$ mit $\sigma(\mathcal{O}) = \sigma(\mathcal{M}_4) = \mathcal{B}_n$.

Aufgabe 3: (Semi-Ringe und Maße)
Seien Ω eine Menge, $M \subseteq \Omega$ und $\mathcal{S} := \{ \varnothing \} \cup \{ \{ \omega \} \;:\; \omega \in \Omega \}$. Weiterhin sei $\mu : \mathcal{S} \longrightarrow [0, \infty]$ gegeben durch $\mu(\varnothing) = 0$ sowie $\mu(\{ \omega \}) = 1$, falls $\omega \in M$, und $\mu(\{ \omega \}) = 0$, sonst.

a) Zeigen Sie, dass $\mathcal{S}$ ein Semi-Ring ist.

b) Zeigen Sie, dass μ endlich additiv ist.

c) Konstruieren Sie ein Maß ν auf dem Messraum $(\Omega, \sigma(\mathcal{S}))$ mit $\nu|_{\mathcal{S}} = \mu$.

d) Geben Sie eine Bedingung an Ω an, die sicherstellt, dass das Maß ν aus Teil c) eindeutig ist.

e) Zeigen Sie, dass für überabzählbares Ω und endliches M mindestens zwei verschiedene Maße ν und ν' auf dem Messraum $(\Omega, \sigma(\mathcal{S}))$ existieren mit $\nu|_{\mathcal{S}} = \nu'|_{\mathcal{S}} = \mu$.

Hinweise: Nach Übungsaufgabe 1.2 ist $\sigma(\mathcal{S}) = \{ A \subseteq \Omega \;:\; A \text{ oder } A^c \text{ ist abzählbar} \}$.
Für Teil c) überlegen Sie zunächst, was $\nu(A)$ für abzählbares $A \subseteq \Omega$ sein muss.
Für Teil e) überlegen Sie, wie $\nu'(A) \neq \nu(A)$ für überabzählbares $A \in \sigma(\mathcal{S})$ definiert werden kann.