Übungsblatt 4

Analysis III, WiSe 2018/2019

Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

Ausgabe: Di., 06.11.2018, Abgabe: Di., 13.11.2018

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

B **Aufgabe 1:** (Maßdefinierende Funktionen, 4 Punkte)
Sei μ ein Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_1)$, so dass $\mu((-\infty, x]) < \infty$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass durch $G(x) = \mu((-\infty, x])$ eine maßdefinierende Funktion $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben ist mit $\lim_{x\to-\infty} G(x) = 0$.

B **Aufgabe 2:** ((Ur-) Bilder von σ-Algebren, $2+2+2+2$ Punkte)
Seien Ω und Ω' Mengen und $f : \Omega \longrightarrow \Omega'$. Zeigen Sie:

a) Für jede σ-Algebra $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{P}(\Omega')$ ist $f^{-1}(\mathcal{A}') = \{\, f^{-1}(A') \,:\, A' \in \mathcal{A}' \,\} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra.

b) Für jede σ-Algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ist $\mathcal{A}_f = \{\, A' \subseteq \Omega' \,:\, f^{-1}(A') \in \mathcal{A} \,\} \subseteq \mathcal{P}(\Omega')$ eine σ-Algebra.

Beweisen oder widerlegen Sie:

c) Für jede σ-Algebra $\mathcal{A}' \subseteq \mathcal{P}(\Omega')$ ist $\{\, A \subseteq \Omega \,:\, f(A) \in \mathcal{A}' \,\} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ eine σ-Algebra.

d) Für jede σ-Algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ist $\{\, f(A) \,:\, A \in \mathcal{A} \,\} \subseteq \mathcal{P}(\Omega')$ eine σ-Algebra.

B **Aufgabe 3:** (Produkt-σ-Algebren, $3+3+2$ Punkte)
Seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1), \ldots, (\Omega_n, \mathcal{A}_n)$ Messräume. Seien $\mathcal{E}_j \subseteq \mathcal{P}(\Omega_j)$ mit $\sigma(\mathcal{E}_j) = \mathcal{A}_j$ für $j = 1, \ldots, n$ und

$$\mathcal{E}_1 \times \cdots \times \mathcal{E}_n = \Big\{\, E_1 \times \cdots \times E_n \,:\, E_j \in \mathcal{E}_j \text{ für } j = 1, \ldots, n \,\Big\}.$$

Weiterhin existiere für jedes $j = 1, \ldots, n$ eine Folge $(E_j^{(k)})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}_j$ mit $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_j^{(k)} = \Omega_j$. Zeigen Sie:

a) $\mathcal{E}_1 \times \cdots \times \mathcal{E}_n \subseteq \sigma(\bigcup_{j=1}^n \pi_j^{-1}(\mathcal{E}_j))$.

b) $\bigcup_{j=1}^n \pi_j^{-1}(\mathcal{E}_j) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1 \times \cdots \times \mathcal{E}_n)$.

c) $\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n = \sigma(\mathcal{E}_1 \times \cdots \times \mathcal{E}_n)$.

Hinweise: Sind $E_j \in \mathcal{E}_j$ für $j = 1, \ldots, n$, so ist

$$\pi_j^{-1}(E_j) = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_{j-1} \times E_j \times \Omega_{j+1} \times \cdots \times \Omega_n$$

und damit

$$\bigcap_{j=1}^{n} \pi_j^{-1}(E_j) = E_1 \times \cdots \times E_n,$$

was für Teil a) hilfreich ist.

Für Teil b) reicht es zu zeigen, dass $\pi_j^{-1}(\mathcal{E}_j) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1 \times \cdots \times \mathcal{E}_n)$ für alle $j = 1, \ldots, n$. Hierbei ist die Bedingung $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_j^{(k)} = \Omega_j$ hilfreich.

Für Teil c) denken Sie an Satz 4.9.

Vgl. Präsenzaufgabe 4. Warum wird dort eine Bedingung wie $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_j^{(k)} = \Omega_j$ nicht benötigt?
Vgl. Präsenzaufgabe 5. Ist dort eine solche Bedingung erfüllt?

Aufgabe 4: (Punktetrennung)
Seien Ω eine Menge, $x, y \in \Omega$ und $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ein Mengensystem. Zeigen Sie, dass $\mathcal{M}$ genau dann die Punkte x und y trennt, wenn $\sigma(\mathcal{M})$ die Punkte x und y trennt.

Hinweise: Ein Mengensystem $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ trennt die Punkte x und y, falls ein $N \in \mathcal{N}$ existiert, so dass $N \cap \{\, x, y \,\}$ einelementig ist. Wegen $\mathcal{M} \subseteq \sigma(\mathcal{M})$ ist also eine der Implikationen trivial. Trennt $\mathcal{M}$ die Punkte x und y nicht, so betrachte man das Mengensystem $\mathcal{A} = \{\, A \in \sigma(\mathcal{M}) \,:\, x \in A \Leftrightarrow y \in A \,\}$ und zeige, dass $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra mit $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{A}$ ist.

Präsenzaufgaben

Analysis III, WiSe 2018/2019

Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

Bearbeitung: Mi./Do., 07./08.11.2018

Aufgabe 1: (Stetigkeit und Messbarkeit)
Seien $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum, $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ messbar, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit $f(\Omega) \subseteq U$ und $g : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ stetig. Zeigen Sie, dass $g \circ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ messbar ist.

Hinweis: Auf dem $\mathbb{R}^n$ wird, wenn nichts anderes angegeben ist, die Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}_n$ betrachtet.

Aufgabe 2: (Urbilder (von Erzeugern) von σ-Algebren)
Seien Ω und Ω' Mengen sowie $f : \Omega \longrightarrow \Omega'$. Zeigen Sie: Für $\mathcal{M}' \subseteq \mathcal{P}(\Omega')$ ist $f^{-1}(\sigma(\mathcal{M}')) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{M}'))$.

Hinweis: Sie können Übungsaufgabe 2 a) verwenden. Denken Sie an Lemma 4.4.

Aufgabe 3: (Initial-σ-Algebren)
Seien Ω eine Menge und $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ein Mengensystem. Zeigen Sie, dass $\sigma(\mathcal{M}) = \sigma(\{\, \chi_M \,:\, M \in \mathcal{M}\,\})$.

Aufgabe 4: (Produkt-σ-Algebren)
Seien $(\Omega_1, \mathcal{A}_1), \ldots, (\Omega_n, \mathcal{A}_n)$ Messräume und

$$\mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_n = \Big\{\, A_1 \times \cdots \times A_n \,:\, A_j \in \mathcal{A}_j \text{ für } j = 1, \ldots, n \,\Big\}.$$

Zeigen Sie:

a) $\mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_n \subseteq \sigma(\bigcup_{j=1}^n \pi_j^{-1}(\mathcal{A}_j))$.

b) $\bigcup_{j=1}^n \pi_j^{-1}(\mathcal{A}_j) \subseteq \sigma(\mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_n)$.

c) $\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n = \sigma(\mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_n)$.

Hinweise: Sind $A_j \in \mathcal{A}_j$ für $j = 1, \ldots, n$, so ist

$$\pi_j^{-1}(A_j) = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_{j-1} \times A_j \times \Omega_{j+1} \times \cdots \times \Omega_n$$

und damit

$$\bigcap_{j=1}^{n} \pi_j^{-1}(A_j) = A_1 \times \cdots \times A_n,$$

was für Teil a) hilfreich ist.

Für Teil b) reicht es zu zeigen, dass $\pi_j^{-1}(\mathcal{A}_j) \subseteq \mathcal{A}_1 \times \cdots \times \mathcal{A}_n$ für alle $j = 1, \ldots, n$.

Aufgabe 5: (Produkt-σ-Algebren)
Seien Ω eine überabzählbare Menge, $\mathcal{E} = \{\, \{\,\omega\,\} \,:\, \omega \in \Omega \,\}$ und $\mathcal{A} := \sigma(\mathcal{E})$. Zeigen Sie, dass $\sigma(\mathcal{E} \times \mathcal{E}) \subsetneq \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$.

Hinweise: Nach Übungsaufgabe 1.2 ist $\sigma(\mathcal{E}) = \{\, A \subseteq \Omega \,:\, A \text{ oder } A^c \text{ ist abzählbar}\,\}$.
Bestimmen Sie zunächst $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ und $\sigma(\mathcal{E} \times \mathcal{E})$.
Die Inklusion $\sigma(\mathcal{E} \times \mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ folgt aus Übungsaufgabe 3 a). Dies soll hier nicht gezeigt werden.
Beachten Sie, dass $A \times \Omega = \pi_1^{-1}(A) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ für jedes $A \in \mathcal{A}$.