Übungsblatt 5

Analysis III, WiSe 2018/2019

Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

HEINRICH HEINE UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Ausgabe: Di., 13.11.2018, Abgabe: Di., 20.11.2018

B **Aufgabe 1:** (Messbare Funktionen, 4 Punkte)
Seien $(\Omega,\, \mathcal{A})$ und $(\Omega',\, \mathcal{A}')$ Messräume und $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ paarweise disjunkt mit $\Omega = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$. Für $k \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{A}_k := \mathcal{A}|_{A_k}$ die Spur-σ-Algebra auf A_k. Zeigen Sie, dass eine Funktion $f : \Omega \longrightarrow \Omega'$ genau dann $(\mathcal{A},\, \mathcal{A}')$-messbar ist, wenn für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Funktion $f|_{A_k} : A_k \longrightarrow \Omega'$ jeweils $(\mathcal{A}_k,\, \mathcal{A}')$-messbar ist.

B **Aufgabe 2:** (Messbare numerische Funktionen, 4 Punkte)
Seien $(\Omega,\, \mathcal{A})$ ein Messraum und $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge messbarer numerischer Funktionen $f_k : \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$. Zeigen Sie, dass die Menge $\{\, \omega \in \Omega \,:\, (f_k(\omega))_{k\in\mathbb{N}} \text{ konvergiert in } \bar{\mathbb{R}} \,\} \subseteq \Omega$ messbar ist.

Hinweis: Sind $\liminf_{k\to\infty} f_k$ und $\limsup_{k\to\infty} f_k$ messbar?

B **Aufgabe 3:** (Lineare Transformationen des Lebesgue-Maßes, $4+4+2$ Punkte)
Sei $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ linear und bijektiv. Zeigen Sie:

a) $T^{-1} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ist Borel-messbar (d. h. $\mathcal{B}_n$-$\mathcal{B}_n$-messbar).

b) Für $\mu : \mathcal{B}_n \longrightarrow [0,\, \infty]$ mit $\mu(A) := \lambda_n(TA)$ für $A \in \mathcal{B}_n$ gilt $\mu = (\lambda_n|_{\mathcal{B}_n})^{T^{-1}}$.

c) Durch $A \mapsto \lambda_n(TA) : \mathcal{B}_n \longrightarrow [0,\, \infty]$ ist ein Maß auf $(\mathbb{R}^n,\, \mathcal{B}_n)$ gegeben.

Aufgabe 4: (Borel- und Lebesgue-Messbarkeit)
Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit $f(x) := (x,\, 0)^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^2$ für $x \in \mathbb{R}$ zwar $(\mathcal{B}_1,\, \mathcal{B}_2)$-messbar ist, aber nicht $(\mathcal{L}_1,\, \mathcal{L}_2)$-messbar.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass Mengen $A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{L}_1$ existieren. Betrachten Sie für eine solche Menge A dann die Menge $B := A \times \{\, 0 \,\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Ist $B \in \mathcal{L}_2$?

Präsenzaufgaben

Analysis III, WiSe 2018/2019

Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

Bearbeitung: Mi./Do., 14./15.11.2018

Aufgabe 1: (Bildmaße)
Seien $(\Omega,\, \mathcal{A},\, \mu)$ ein Maßraum, $(\Omega',\, \mathcal{A}')$ ein Messraum und $f : \Omega \longrightarrow \Omega'$ messbar. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Ist μ σ-endlich, dann ist auch μ^f σ-endlich.

b) Ist μ^f σ-endlich, dann ist auch μ σ-endlich.

Aufgabe 2: (Messbare numerische Funktionen)
Sei $(\Omega,\, \mathcal{A})$ ein Messraum.

a) Gibt es numerische Funktionen $f : \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ für die $|f|$ messbar ist, f jedoch nicht?

b) Sei μ ein Maß auf $(\Omega,\, \mathcal{A})$, so dass $(\Omega,\, \mathcal{A},\, \mu)$ vollständig ist. Sei $f : \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ messbar und $N := \{\, f = 0 \,\} \in \mathcal{A}$ eine μ-Nullmenge. Sei $g : \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ so, dass $g(\omega) = 1/f(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega \setminus N$. Zeigen Sie, dass g messbar ist.

Hinweis: Für Teil b) ist wie üblich $1/\infty := 1/(-\infty) := 0$.

Aufgabe 3: (Dilatationen Lebesgue-messbarer Mengen)
Im Folgenden soll gezeigt werden, dass $\lambda_n(\rho A) = \rho^n \lambda_n(A)$ für alle $\rho > 0$ und alle Lebesgue-messbaren Mengen $A \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt. Hierbei ist $\rho A = \{\, \rho x \;:\; x \in A \,\}$. Für die folgenden Teilaufgaben sei $\rho > 0$ fixiert.

a) Die Abbildung $T_\rho : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit $T_\rho x := \rho^{-1} x$ für $x \in \mathbb{R}^n$ ist linear und stetig.

b) Für $\mu : \mathcal{B}_n \longrightarrow [0,\, \infty]$ mit $\mu(A) := \rho^{-n} \lambda_n(\rho A)$ für $A \in \mathcal{B}_n$ gilt $\mu = \rho^{-n} (\lambda_n|_{\mathcal{B}_n})^{T_\rho}$.

c) μ ist ein Maß auf $(\mathbb{R}^n,\, \mathcal{B}_n)$ mit $\mu|_{\mathcal{I}_n} = \lambda_n|_{\mathcal{I}_n}$.

d) $\mu = \lambda_n|_{\mathcal{B}_n}$, d. h. für alle $A \in \mathcal{B}_n$ ist $\lambda_n(\rho A) = \rho^n \lambda_n(A)$.

e) Für alle $A \in \mathcal{L}_n$ ist $\lambda_n(\rho A) = \rho^n \lambda_n(A)$.

Hinweise: Wie üblich bezeichnet

$$\mathcal{I}_n := \left\{\, (x,\, y] \;:\; x,\, y \in \mathbb{R}^n,\; x_j \le y_j \text{ für } j = 1,\, \dots,\, n \,\right\}$$

den Semi-Ring der halboffenen Quader im $\mathbb{R}^n$. Nach Präsenzaufgabe 3.2 b) ist $\sigma(\mathcal{I}_n) = \mathcal{B}_n$.

Für Teil d) denken Sie an den Eindeutigkeitssatz 3.9.

Für Teil e) beachten Sie: Nach Satz 5.12 und Übungsaufgabe 3.2 ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ genau dann Lebesgue-messbar, wenn $E,\, F \in \mathcal{B}_n$ existieren mit $E \subseteq A \subseteq F$ und $\lambda_n(F \setminus E) = 0$. In diesem Fall können E und F nach Satz 5.10 so gewählt werden, dass $\lambda_n(E) = \lambda_n(A) = \lambda_n(F)$.