Übungsblatt 6

Analysis III, WiSe 2018/2019

Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

HEINRICH HEINE UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Ausgabe: Di., 20.11.2018, Abgabe: Di., 27.11.2018

B **Aufgabe 1:** (Treppenfunktionen, 3 Punkte)
Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $f, g \in \mathcal{T}^+$ und $\alpha \geq 0$. Zeigen Sie, dass $\alpha f,\ f+g,\ \min\{f, g\} \in \mathcal{T}^+$. Geben Sie jeweils eine Normaldarstellung an.

B **Aufgabe 2:** (Approximation durch Treppenfunktionen, $3+3$ Punkte)
Seien $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ und $f : \Omega \longrightarrow [0, \infty]$ eine numerische Funktion. Wie in Satz 6.7 seien

$$A_j^n := \begin{cases} \{\, \frac{j}{2^n} \leq f < \frac{j+1}{2^n} \,\}, & j = 0, \ldots, n2^n - 1, \\ \{\, f \geq n \,\}, & j = n2^n, \end{cases} \qquad u_n := \sum_{j=0}^{n2^n} \frac{j}{2^n} \chi_{A_j^n}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Skizzieren Sie jeweils u_1 und u_2 für

a) $\Omega = [0, \pi]$ und $f(x) = \sin(x)$ für $0 \leq x \leq \pi$;

b) $\Omega = (0, 1]$ und $f(x) = \frac{1}{x} - 1$ für $0 < x \leq 1$.

B **Aufgabe 3:** (Algebraische Induktion, 6 Punkte)
Betrachten Sie den Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ mit $\Omega = \mathbb{N}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und dem Zählmaß μ, das gegeben ist durch $\mu(A) = |A|$, falls $A \subseteq \mathbb{N}$ endlich ist, und $\mu(A) = \infty$ für alle unendlichen Mengen $A \subseteq \mathbb{N}$. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \bar{\mathbb{R}}$ und $f : \mathbb{N} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ gegeben als $f(n) := a_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass f genau dann μ-integrierbar ist, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$, und, dass in diesem Fall gilt:

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

B **Aufgabe 4:** (Integration von Reihen, 4 Punkte)
Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}^+$. Zeigen Sie, dass $\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k \in \mathcal{M}^+$ mit

$$\int \sum_{k\in\mathbb{N}} f_k \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k\in\mathbb{N}} \int f_k \,\mathrm{d}\mu.$$

Hinweis: Denken Sie an den Satz von der monotonen Konvergenz.

Aufgabe 5: (Lemma von Sard)
Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $E := \{\, x \in \mathbb{R} \,:\, f'(x) = 0 \,\}$. Dann ist $\lambda_1(f(E)) = 0$. Zeigen Sie dazu:

a) Jede der Mengen

$$E_n^\varepsilon := \Big\{\, x \in (-n, n) \,:\, |f'(x)| < \frac{\varepsilon}{n2^n} \,\Big\}, \qquad n \in \mathbb{N},\ \varepsilon > 0,$$

lässt sich darstellen als abzählbare Vereinigung von paarweise disjunkten, offenen Intervallen $J_{n,k}^\varepsilon$, wobei

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \lambda_1(J_{n,k}^\varepsilon) \leq 2n.$$

b) Für jedes Intervall $J_{n,k}^\varepsilon$ existiert ein $B_{n,k}^\varepsilon \in \mathcal{I}_1$ der Länge $\lambda_1(B_{n,k}^\varepsilon) = \frac{2\varepsilon}{n2^n} \lambda_1(J_{n,k}^\varepsilon)$ mit $f(J_{n,k}^\varepsilon) \subseteq B_{n,k}^\varepsilon$.

c) $f(E) \subseteq \mathbb{R}$ ist eine λ_1-Nullmenge.

Hinweise: Für Teil a) können Sie verwenden, dass jede offene Teilmenge von $\mathbb{R}$ als abzählbare Vereinigung von paarweise disjunkten, offenen Intervallen dargestellt werden kann.

Für Teil b) denken Sie an den Mittelwertsatz der Differentialrechnung. Wie üblich bezeichnet $\mathcal{I}_1$ den Semi-Ring der halboffenen Intervalle in $\mathbb{R}$.

Präsenzaufgaben

Analysis III, WiSe 2018/2019

Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

Bearbeitung: Mi./Do., 21./22.11.2018

Aufgabe 1: (Treppenfunktionen)
Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f, g \in \mathcal{T}^+$. Zeigen Sie, dass $f \cdot g,\ \max\{f, g\} \in \mathcal{T}^+$. Geben Sie jeweils eine Normaldarstellung an.

Aufgabe 2: (Approximation durch Treppenfunktionen)
Für $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ und eine numerische Funktion $f : \Omega \longrightarrow [0, \infty]$ seien $A_0^n, \ldots, A_{n2^n}^n \subseteq \Omega$ und u_n für $n \in \mathbb{N}$ definiert wie in Satz 6.7; vgl. Übungsaufgabe 2. Skizzieren Sie u_1 und u_2 für $\Omega = [0, \frac{\pi}{2})$ und $f(x) = \tan(x)$ für $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 3: (Algebraische Induktion)
Seien $(\Omega, \mathcal{A})$ ein Messraum und $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Maßen auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Dann ist $\mu := \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu_k$ ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Zeigen Sie: Eine $\mathcal{A}$-messbare numerische Funktion $f : \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ ist genau dann μ-integrierbar, wenn $\sum_{k\in\mathbb{N}} \int |f| \mathrm{d}\mu_k < \infty$ und in diesem Fall gilt:

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k\in\mathbb{N}} \int f \,\mathrm{d}\mu_k.$$

Hinweise: Es ist $\mu = \lim_{k\to\infty} \nu_k$ für *die Maße* $\nu_k := \sum_{j=1}^k \mu_j$ für $k \in \mathbb{N}$.
Daher ist μ tatsächlich ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$ nach Übungsaufgabe 3.1.
Dies muss hier nicht gezeigt werden.

Sie können verwenden, dass für eine in beiden Indizes monoton wachsende Doppelfolge $(a_{m,n})_{m,n\in\mathbb{N}} \subseteq [0, \infty]$ stets gilt:

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} a_{m,n} = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} a_{m,n}.$$

Vgl. auch die Argumentation bei Übungsaufgabe 3.1.