Übungsblatt 7

Analysis III, WiSe 2018/2019

Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Ausgabe: Di., 27.11.2018, Abgabe: Di., 04.12.2018

B **Aufgabe 1:** (Integration positiver Funktionen, 4 Punkte)
Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $f : \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ eine μ-integrierbare numerische Funktion mit $f > 0$ μ-f. ü. in Ω. Zeigen Sie: Für alle $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) > 0$ ist $\int_A f \mathrm{d}\mu > 0$.

B **Aufgabe 2:** (Integration von Fortsetzungen, 4 Punkte)
Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $\varnothing \neq A \in \mathcal{A}$, sowie $\mathcal{A}' := \mathcal{A}|_A$ die Spur-σ-Algebra und $\mu_A := \mu|_{\mathcal{A}'}$ das Spur-Maß. Die Abbildung $f : A \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ sei $\mathcal{A}'$-$\bar{\mathcal{B}}_1$-messbar. Zeigen Sie: Die triviale Fortsetzung

$$F : \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}, \qquad F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ 0, & x \in \Omega \setminus A, \end{cases} \qquad x \in \Omega,$$

ist $\mathcal{A}$-$\bar{\mathcal{B}}_1$-messbar. F ist genau dann μ-integrierbar, wenn f μ_A-integrierbar ist, und in diesem Fall gilt:

$$\int_\Omega F \,\mathrm{d}\mu = \int_A f \,\mathrm{d}\mu_A.$$

Hinweis: Verwenden Sie das Prinzip der algebraischen Induktion.

B **Aufgabe 3:** (Transformationssatz für Maße, 4 Punkte)
Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $(\Omega', \mathcal{A}')$ ein Messraum und $h : \Omega \longrightarrow \Omega'$ messbar. Zeigen Sie: Eine messbare numerische Funktion $f : \Omega' \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ ist genau dann μ^h-integrierbar, wenn $f \circ h$ μ-integrierbar ist, und in diesem Fall gilt:

$$\int_{\Omega'} f \,\mathrm{d}\mu^h = \int_\Omega f \circ h \,\mathrm{d}\mu.$$

Hinweis: Verwenden Sie das Prinzip der algebraischen Induktion.

B **Aufgabe 4:** (Konvergenz/Divergenz von Integralen, $2+2+2$ Punkte)
Geben Sie jeweils ein Beispiel einer Folge von λ_1-integrierbaren Funktionen $f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ an, so dass $f_k \to 0$ für $k \to \infty$ f. ü. auf $\mathbb{R}$ und

a) $\int_{\mathbb{R}} f_k \,\mathrm{d}\lambda_1 \to 1$ für $k \to \infty$;

b) $\int_{\mathbb{R}} f_k \,\mathrm{d}\lambda_1 \to \infty$ für $k \to \infty$;

c) $\liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k \,\mathrm{d}\lambda_1 = -1$ und $\limsup_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_k \,\mathrm{d}\lambda_1 = 1$.

Aufgabe 5: (Quasi-Integrierbarkeit)
Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{\sin(x)}{x}, \qquad x > 0,$$

nicht quasi-integrierbar ist.

Hinweis: Sie können verwenden, dass f nicht integrierbar ist, d. h. dass f^+ oder f^- nicht integrierbar ist.

Präsenzaufgaben

Analysis III, WiSe 2018/2019

Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

HEINRICH HEINE UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Bearbeitung: Mi./Do., 28./29.11.2018

Aufgabe 1: (Integration auf Teilmengen)
Seien $(\Omega,\, \mathcal{A},\, \mu)$ ein Maßraum, $\varnothing \neq A \in \mathcal{A}$, sowie $f : \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ messbar. Sei μ_A das Spur-Maß auf $(A,\, \mathcal{A}|_A)$ und sei $\hat{\mu}_A : \mathcal{A} \longrightarrow [0,\, \infty]$ gegeben als $\hat{\mu}_A(B) := \mu(A \cap B)$ für $B \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie:

a) $\hat{\mu}_A$ ist ein Maß auf $(\Omega,\, \mathcal{A})$.

b) Ist f μ-integrierbar, dann sind $f|_A$ μ_A-integrierbar und f $\hat{\mu}_A$-integrierbar und es gilt:

$$\int\limits_A f|_A \,\mathrm{d}\mu_A \;=\; \int\limits_\Omega f \,\mathrm{d}\hat{\mu}_A \;=\; \int\limits_A f \,\mathrm{d}\mu.$$

Hinweise: Für eine messbare numerische Funktion $f : \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ und $A \in \mathcal{A}$ ist $\chi_A f$ messbar; ist f μ-integrierbar, dann ist auch $\chi_A f$ μ-integrierbar und $\int_A f \mathrm{d}\mu := \int_\Omega \chi_A f \mathrm{d}\mu$ (vgl. Definition 7.5).

Verwenden Sie das Prinzip der algebraischen Induktion.

Aufgabe 2: (Additivität des Integrals bzgl. Teilmengen)
Seien $(\Omega,\, \mathcal{A},\, \mu)$ ein Maßraum, $\varnothing \neq A,\, B \in \mathcal{A}$ disjunkt, sowie $f : \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ messbar mit $f(x) = 0$ für μ-f. a. $x \in \Omega \setminus (A \cup B)$. Zeigen Sie: f ist genau dann μ-integrierbar, wenn $\chi_A f$ und $\chi_B f$ μ-integrierbar sind, und in diesem Fall gilt:

$$\int\limits_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_A f \,\mathrm{d}\mu + \int\limits_B f \,\mathrm{d}\,\mu.$$

Hinweis: Verwenden Sie eine geeignete Darstellung für f und die bekannten Eigenschaften des Integrals.

Aufgabe 3: (σ-Additivität des Integrals bzgl. Teilmengen)
Seien $(\Omega,\, \mathcal{A},\, \mu)$ ein Maßraum und $(A_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ paarweise disjunkt mit $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k = \Omega$. Zeigen Sie: Eine messbare numerische Funktion $f : \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ ist genau dann μ-integrierbar, wenn $\sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{A_k} |f| \,\mathrm{d}\mu < \infty$, und in diesem Fall gilt:

$$\int\limits_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \;=\; \sum_{k\in\mathbb{N}} \int\limits_{A_k} f \,\mathrm{d}\mu.$$

Hinweise: Satz 7.9 und die Korollare 7.11 und 7.12 sollen nicht verwendet werden.

Betrachten Sie für $k \in \mathbb{N}$ *das Maß* $\mu_k : \mathcal{A} \longrightarrow [0,\, \infty]$ mit $\mu_k(A) := \mu(A \cap A_k)$ für $A \in \mathcal{A}$ (vgl. Präsenzaufgabe 1) und zeigen Sie, dass $\mu = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu_k$ (vgl. Präsenzaufgabe 6.3).

Aufgabe 4: (Integrierbare Funktionen)
Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : (0,\, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x^2}, \qquad x > 0,$$

integrierbar ist.

Hinweise: Geben Sie eine Majorante g für $|f|$ an, so dass Sie für g und $A_k = ((k-1)\pi,\, k\pi]$ für $k \in \mathbb{N}$ das Resultat aus Präsenzaufgabe 3 verwenden können.

Dieses Resultat zeigt zusammen mit Übungsaufgabe 3, dass die Funktion f aus Übungsaufgabe 5 λ_1^h-integrierbar ist für die messbare Funktion $x \mapsto h(x) := x^2 : (0,\, \infty) \longrightarrow (0,\, \infty)$.