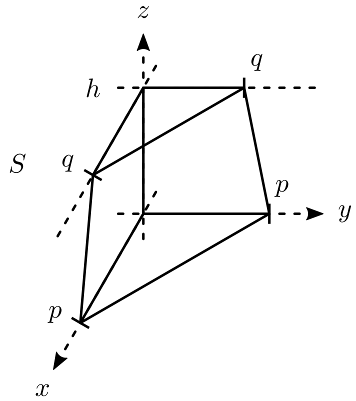
Übungsblatt 8

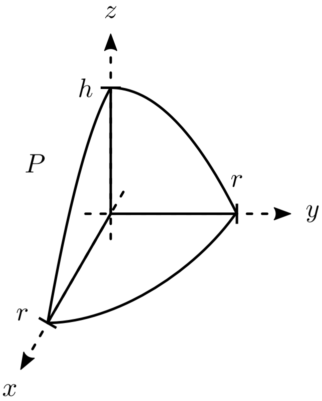
Analysis III, WiSe 2018/2019

Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

Ausgabe: Di., 04.12.2018, Abgabe: Di., 11.12.2018

B **Aufgabe 1:** (Das Prinzip von Cavalieri, $3+3$ Punkte)
Seien $h,\ p,\ q,\ r > 0$. Bestimmen Sie jeweils nach dem Prinzip von Cavalieri das Volumen des Pyramidenstumpfs $S \subseteq \mathbb{P}^3$ bzw. des Viertelparaboloids $P \subseteq \mathbb{P}^3$, wobei $\mathbb{P} := (0,\ \infty)$,





$S := \{\, (x,\ y,\ z)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{P}^3 \ :\ x + y < (1 - \frac{z}{h})p + \frac{z}{h}q,\ \ z < h \,\}$ und $P := \{\, (x,\ y,\ z)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{P}^3 \ :\ x^2 + y^2 < (1 - \frac{z}{h})r^2 \,\}$.

Hinweise: Für $\alpha,\ \beta,\ \gamma > 0$ ist die Menge $D = \{\, (x,\ y)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{P}^2 \ :\ \alpha x + \beta y < \gamma \,\}$ ein rechtwinkliges Dreieck mit Kathetenlängen $\frac{\gamma}{\alpha}$ und $\frac{\gamma}{\beta}$ und Flächeninhalt $\lambda_2(D) = \frac{1}{2}\frac{\gamma^2}{\alpha\beta}$.

Für $\rho > 0$ ist die Menge $V = \{\, (x,\ y) \in \mathbb{P}^2 \ :\ x^2 + y^2 < \rho^2 \,\}$ ein Viertelkreis mit Radius ρ und Flächeninhalt $\lambda_2(V) = \frac{1}{4}\pi\rho^2$.

B **Aufgabe 2:** (Faltungen, 6 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $g \in C^m(\mathbb{R})$ mit kompaktem Träger. Sei $u : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben als

$$u(y) := \int_{\mathbb{R}} f(x)g(y - x)\,\mathrm{d}x, \qquad\qquad y \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass $u \in C^m(\mathbb{R})$ ist und bestimmen Sie die Ableitungen von u bis zur Ordnung m.

Hinweis: Der Träger einer Funktion $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist der Abschluss der Menge $\{\, x \in \mathbb{R} \ :\ \phi(x) \neq 0 \,\}$.

B **Aufgabe 3:** (Der Satz von Fubini, 6 Punkte)
Betrachten Sie die Funktion $f : (0,\ 1) \times (0,\ 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x,\ y) = (x + y)^{-3}(x - y)$ für $0 < x,\ y < 1$. Zeigen Sie: Für $(x,\ y) \in \mathbb{R}^2$ sind die Funktionen $f(x,\ \cdot\ )$ und $f(\ \cdot\ ,\ y)$ über $\mathbb{R}$ integrierbar und es gilt

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,\ y)\,\mathrm{d}\lambda_1(y)\,\mathrm{d}\lambda_1(x) \neq \int_0^1 \int_0^1 f(x,\ y)\,\mathrm{d}\lambda_1(x)\,\mathrm{d}\lambda_1(y)$$

Warum ist dies kein Widerspruch zum Satz von Fubini?

Aufgabe 4: (Konvergenz von Integralen)
Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\,\mathrm{d}x = 1.$$

Hinweis: Stellen Sie das Integral mit von n unabhängigen Integralgrenzen dar.

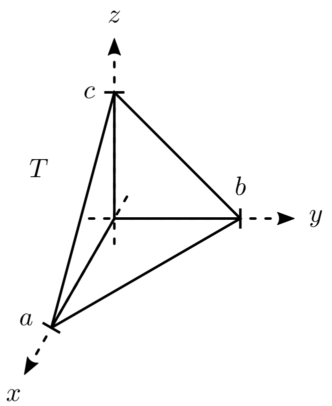
Präsenzaufgaben

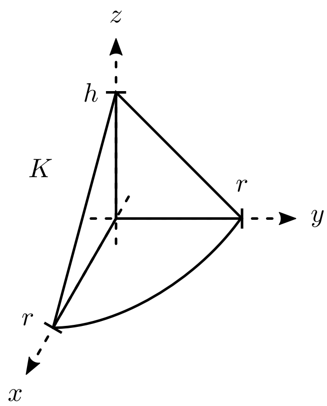
Analysis III, WiSe 2018/2019

Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

Bearbeitung: Mi./Do., 05./06.12.2018

Aufgabe 1: (Das Prinzip von Cavalieri)
Seien $a,\, b,\, c,\, h,\, r > 0$. Bestimmen Sie jeweils nach dem Prinzip von Cavalieri das Volumen des Tetraeders $T \subseteq \mathbb{P}^3$ bzw. des Viertelkegels $K \subseteq \mathbb{P}^3$, wobei $\mathbb{P} := (0,\, \infty)$,





$T := \{\, (x,\, y,\, z)^\mathsf{T} \in \mathbb{P}^3 \;:\; \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} < 1 \,\}$ und $K := \{\, (x,\, y,\, z)^\mathsf{T} \in \mathbb{P}^3 \;:\; \sqrt{x^2 + y^2} < (1 - \frac{z}{h})r \,\}$.

Hinweise: Vgl. Hinweise zu Übungsaufgabe 1.

Aufgabe 2: (Parameterabhängige Integrale)
Seien μ ein endliches Maß auf $(\mathbb{R},\, \mathcal{B}_1)$ und $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben als

$$f(y) = \int_{\mathbb{R}} \sin(xy)\, \mathrm{d}\mu(x), \qquad\qquad y \in \mathbb{R}.$$

a) Zeigen Sie: Ist $|\cdot|$ μ-integrierbar, dann ist f differenzierbar; bestimmen Sie f'.

b) Zeigen Sie: Ist $|\cdot|^2$ μ-integrierbar, dann ist f zweimal differenzierbar; bestimmen Sie f''.

Aufgabe 3: (Der Satz von Fubini)
Für $k \in \mathbb{N}_0$ seien $A_k := (k,\, k+1] \times (k,\, k+1]$ sowie $A_k^+ := (k,\, k+\frac{1}{2}] \times (k,\, k+\frac{1}{2}] \cup (k+\frac{1}{2},\, k+1] \times (k+\frac{1}{2},\, k+1]$ und $A_k^- := (k,\, k+\frac{1}{2}] \times (k+\frac{1}{2},\, k+1] \cup (k+\frac{1}{2},\, k+1] \times (k,\, k+\frac{1}{2}]$. Sei weiterhin $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben als

$$f(x,\, y) := \begin{cases} 1, & \text{falls } (x,\, y) \in A_k^+ \text{ für ein } k \in \mathbb{N}_0, \\ -1, & \text{falls } (x,\, y) \in A_k^- \text{ für ein } k \in \mathbb{N}_0, \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases} \qquad\qquad (x,\, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Zeigen Sie: Für $(x,\, y) \in \mathbb{R}^2$ sind die Funktionen $f(x,\, \cdot\,)$ und $f(\,\cdot\,,\, y)$ über $\mathbb{R}$ integrierbar und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x,\, y)\, \mathrm{d}\lambda_1(y)\, \mathrm{d}\lambda_1(x) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} f(x,\, y)\, \mathrm{d}\lambda_1(x)\, \mathrm{d}\lambda_1(y) = 0.$$

Zeigen Sie weiter, dass f nicht über $\mathbb{R}^2$ integrierbar ist. Warum ist der Satz von Fubini nicht anwendbar?

Aufgabe 4: (Iterierte Integrale)
Vertauschen Sie bei den iterierten Integralen

$$\int_0^1 \int_{2x}^{3x} f(x,\, y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x, \qquad\qquad \int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} f(x,\, y)\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x$$

jeweils die Integrationsreihenfolge.

Hinweis: Die Aufgabe besteht darin, die Integrationsgrenzen richtig zu transformieren.