# Übungsblatt 9

## Analysis III, WiSe 2018/2019

## Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

Ausgabe: Di., 11.12.2018, Abgabe: Di., 18.12.2018

HEINRICH HEINE UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

**B** **Aufgabe 1:** (Der Satz von Fubini, $3+3$ Punkte)
Sei $r > 0$. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int_Q \frac{z}{x+y}\,\mathrm{d}(x,\,y,\,z)$ für den Quader $Q = [0,\,1] \times [1,\,2] \times [0,\,2]$;

b) $\int_A x\sqrt{y}\,\mathrm{d}(x,\,y)$ für die Fläche $A \subseteq [0,\,r]^2$, die von den Kurven $y = \frac{1}{r}x^2$ und $y = x$ begrenzt wird.

**B** **Aufgabe 2:** (Integration von Produkten, 3 Punkte)
Seien $g_1,\,\ldots,\,g_m : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und sei $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben als

$$f(x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_m) := g_1(x_1) \cdot g_2(x_2) \cdot \ldots \cdot g_m(x_m), \qquad x = (x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_m) \in \mathbb{R}^m.$$

Zeigen Sie: $f$ ist integrierbar und es gilt:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} f\,\mathrm{d}\lambda_m = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} g_1\,\mathrm{d}\lambda_1\right) \cdot \left(\int\limits_{\mathbb{R}} g_2\,\mathrm{d}\lambda_1\right) \cdot \ldots \cdot \left(\int\limits_{\mathbb{R}} g_m\,\mathrm{d}\lambda_1\right).$$

**B** **Aufgabe 3:** (Polarkoordinaten, 3 Punkte)
Zeigen Sie mit Hilfe einer Transformation in Polarkoordinaten, dass

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}(x,\,y) = \int\limits_{V} e^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}(x,\,y) = \pi,$$

wobei $V := \mathbb{R}^2 \setminus ((-\infty,\,0] \times \{\,0\,\})$ die geschlitzte Ebene bezeichnet.

Hinweis: Verwenden Sie die Polarkoordinaten $(r,\,\lambda) \mapsto (r\cos(\lambda),\,r\sin(\lambda)) : U := (0,\,\infty) \times (-\pi,\,\pi) \longrightarrow V$.

**B** **Aufgabe 4:** (Integration, 2 Punkte)
Zeigen Sie, dass $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$ ist.

Hinweis: Verwenden Sie die Ergebnisse der Aufgaben 2 und 3.

**B** **Aufgabe 5:** (Kugelkoordinaten, $2+2+3$ Punkte)
Betrachten Sie die Koordinatentransformation

$$\Phi : U := (0,\,\infty) \times (-\pi,\,\pi) \times (-\tfrac{\pi}{2},\,\tfrac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad \Phi(r,\,\lambda,\,\varphi) = (r\cos(\lambda)\cos(\varphi),\ r\sin(\lambda)\cos(\varphi),\ r\sin(\varphi))$$

und zeigen Sie:

a) $V := \Phi(U) \subseteq \mathbb{R}^3$ ist offen und $\Phi : U \longrightarrow V$ ist ein $C^1$-Diffeomorphismus.

b) $\det \Phi'(r,\,\lambda,\,\varphi) = r^2\cos(\varphi) > 0$.

Berechnen Sie für $q > \rho > 0$ mit Hilfe von Kugelkoordinaten das Integral $\int_{B_\rho(0)} \frac{1}{|(x,y,z)-(0,0,q)|}\,\mathrm{d}(x,\,y,\,z)$.

Hinweis: Sie können Präsenzaufgabe 3 verwenden.

**Aufgabe 6:** (Nullmengen)
Seien $N \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Lebesgue-Nullmenge und $\Phi : N \longrightarrow \mathbb{R}^n$ Lipschitz-stetig. Zeigen Sie, dass $\Phi(N)$ eine Lebesgue-Nullmenge ist.

**Weihnachtsaufgabe:** (Ein weihnachtliches Gedicht, 3 Bonuspunkte)
Verfassen Sie ein (weihnachtliches) Gedicht mit maximal 40 Worten, das einschlägige Begriffe und Namen aus der Vorlesung (z. B. Maß, Semi-Ring, $\sigma$-Algebra, $\mu$-fast überall, Lebesgue, Cavalieri, ...) enthält. Geben Sie Ihr Gedicht auf einem separaten losen Blatt, beschriftet mit Ihrem Namen ab. Die kreativsten Lösungen werden in der Vorlesung am 21.12.2018 mit hausgemachtem Gebäck prämiert.

# Präsenzaufgaben

## Analysis III, WiSe 2018/2019


## Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

HEINRICH HEINE UNIVERSITÄT DÜSSELDORF


Bearbeitung: Mi./Do., 12./13.12.2018

**Aufgabe 1:** (Der Satz von Fubini)
Sei $r > 0$. Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int_Q (x + y^2)\sin(z)\,\mathrm{d}(x,\,y,\,z)$ für den Quader $Q = [0,\,1] \times [-1,\,1] \times [0,\,\pi]$;

b) $\int_A \frac{y}{1+x^2}\,\mathrm{d}(x,\,y)$ für die Fläche $A := \{\,(x,\,y) \in [0,\,\infty)^2 \,:\, x^2 + y^2 \leq r^2\,\}$.

**Aufgabe 2:** (Zylinderkoordinaten)
Betrachten Sie die Koordinatentransformation

$$\Phi : U := (0,\,\infty) \times (-\pi,\,\pi) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3, \qquad \Phi(r,\,\lambda,\,z) = (r\cos(\lambda),\ r\sin(\lambda),\ z)$$

und zeigen Sie:

a) $V := \Phi(U) \subseteq \mathbb{R}^3$ ist offen und $\Phi : U \longrightarrow V$ ist ein $C^1$-Diffeomorphismus.

b) $\det \Phi'(r,\,\lambda,\,z) = r > 0$.

Berechnen Sie für $\rho,\,h > 0$ mit Hilfe von Zylinderkoordinaten das Integral $\int_{Z_{\rho,h}(0)} (x^2 + y^2) z^2 e^{z^3}\,\mathrm{d}(x,\,y,\,z)$, wobei

$$Z_{\rho,h}(0) := B_\rho(0) \times (-h,\,h) = \Big\{\,(x,\,y,\,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 < \rho^2,\ -h < z < h\,\Big\} \subseteq \mathbb{R}^3.$$

Hinweis: Sie können Präsenzaufgabe 3 verwenden.

**Aufgabe 3:** (Diffeomorphismen)
Seien $m,\,n \in \mathbb{N}$ und $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen sowie $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ eine $C^m$-Abbildung. Es gelte weiterhin:

(i) $f$ ist injektiv;

(ii) $\det f'(x) \neq 0$ für alle $x \in U$.

Zeigen Sie: $V := f(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ ist offen und $f : U \longrightarrow V$ ist ein $C^m$-Diffeomorphismus.

Hinweis: Für $m,\,n \in \mathbb{N}$ ist eine Abbildung $f : \Omega \longrightarrow W$ zwischen offenen Mengen $\Omega,\,W \subseteq \mathbb{R}^n$ genau dann ein $C^m$-Diffeomorphismus, wenn $f$ bijektiv ist und $f$ und $f^{-1}$ $C^m$-Abbildungen sind.