Übungsblatt 10

Analysis III, WiSe 2018/2019

Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

HEINRICH HEINE UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Ausgabe: Di., 18.12.2018, Abgabe: Di., 08.01.2019

B **Aufgabe 1:** (Transformationssatz, 3 Punkte)
Betrachten Sie das Ellipsoid

$$E_n := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \ : \ \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k^2}{a_k^2} < 1 \right\}$$

mit Radien $a_1, \ldots, a_n > 0$.

a) Geben Sie einen C^1-Diffeomorphismus $\Phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ an mit $\Phi(B_1(0)) = E_n$.

b) Bestimmen Sie das Volumen $\lambda_n(E_n)$ in den Fällen $n = 2, 3$.

Hinweis: Nach Beispiel 9.5 b) ist $\lambda_2(B_1(0)) = \pi$ und $\lambda_3(B_1(0)) = \frac{4}{3}\pi$.

B **Aufgabe 2:** (Transformationssatz, $3+6+4$ Punkte)
Betrachten Sie den Körper

$$K := \left\{ (x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ \tfrac{1}{2}(1+z^2) < x^2 + y^2 < 2(1+z^2),\ 0 < z < 2 \right\}.$$

a) Bestimmen Sie das Volumen $\lambda_3(K)$ mit Hilfe des Prinzips von Cavalieri.

b) Seien $U := (1, \infty) \times (-\pi, \pi) \times (0, \infty)$ und $\Phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben als

$$\Phi(r,\, \varphi,\, s) := \left(sr\cos(\varphi),\ sr\sin(\varphi),\ \sqrt{r^2-1} \right), \qquad 1 < r < \infty,\ -\pi < \varphi < \pi,\ 0 < s < \infty.$$

Zeigen Sie, dass $\Phi : U \longrightarrow V := \Phi(U)$ ein C^1-Diffeomorphismus ist, bestimmen Sie $\Phi^{-1}(K)$ und berechnen Sie das Volumen $\lambda_3(K)$ mit Hilfe des Transformationssatzes unter Verwendung der Transformation Φ.

c) Berechnen Sie mit Hilfe des Transformationssatzes unter Verwendung der Transformation Φ das Integral

$$\int_K x^2 z \,\mathrm{d}(x,\, y,\, z).$$

Hinweis: Für Teil b) können Sie Präsenzaufgabe 9.3 verwenden.

B **Aufgabe 3:** (L_p-Räume, Inklusionen, $2+4$ Punkte)
Seien $(\Omega,\, \mathcal{A},\, \mu)$ ein Maßraum und $M := \sup\{\, \mu(A) \ : \ A \in \mathcal{A},\ \mu(A) < \infty \,\} \in [0, \infty]$. Zeigen Sie:

a) Für jede μ-integrierbare Funktion $f : \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ gilt $\mu(\{\, f \neq 0 \,\}) \leq M$.

b) Ist $M < \infty$, dann gilt

$$\|f\|_q \leq M^{1/q - 1/p} \|f\|_p, \qquad f \in L_p(\Omega,\, \mathcal{A},\, \mu), \qquad 1 \leq q < p \leq \infty,$$

d. h. insbesondere $L_p(\Omega,\, \mathcal{A},\, \mu) \subseteq L_q(\Omega,\, \mathcal{A},\, \mu)$ für $1 \leq q < p \leq \infty$.

Hinweise: In Teil b) sollte der Fall $p = \infty$ (dann ist $1/p := 0$) separat betrachtet werden.
Für den Fall $p < \infty$ ist die Hölder'sche Ungleichung hilfreich.

Bemerkungen: Ist $\mu(\Omega) < \infty$, dann gilt $M = \mu(\Omega) < \infty$. Dies liefert die in diesem Fall bekannten Inklusionen

$$L_\infty(\Omega,\, \mathcal{A},\, \mu) \subseteq L_p(\Omega,\, \mathcal{A},\, \mu) \subseteq L_q(\Omega,\, \mathcal{A},\, \mu) \subseteq L_1(\Omega,\, \mathcal{A},\, \mu), \qquad 1 \leq q < p \leq \infty.$$

Mit Hilfe von Übungsaufgabe 4 (und funktionalanalytischen Mitteln) kann auch die Umkehrung von Teil b) gezeigt werden: Gilt die Inklusion $L_p(\Omega,\, \mathcal{A},\, \mu) \subseteq L_q(\Omega,\, \mathcal{A},\, \mu)$ für ein Wertepaar $(p,\, q) \in [1, \infty]^2$ mit $q < p$, dann ist $M < \infty$.

Aufgabe 4: (L_p-Räume, Konvergenz)
Seien $(\Omega,\, \mathcal{A},\, \mu)$ ein Maßraum, $1 \leq p,\, q \leq \infty$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L_p(\Omega,\, \mathcal{A},\, \mu) \cap L_q(\Omega,\, \mathcal{A},\, \mu)$. Zeigen Sie: Konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L_p(\Omega,\, \mathcal{A},\, \mu)$ gegen $f \in L_p(\Omega,\, \mathcal{A},\, \mu)$ und gleichzeitig in $L_q(\Omega,\, \mathcal{A},\, \mu)$ gegen $g \in L_q(\Omega,\, \mathcal{A},\, \mu)$, dann ist $f = g$ μ-f. ü.

Präsenzaufgaben

Analysis III, WiSe 2018/2019

Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

HEINRICH HEINE
UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Bearbeitung: Mi./Do., 19./20.12.2018

Aufgabe 1: (Transformationssatz)
Ist die Massendichte eines Körpers $K \subseteq \mathbb{R}^3$ durch $\rho : K \longrightarrow (0, \infty)$ gegeben, so erhält man seinen Schwerpunkt $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ als

$$\bar{x}_k = \frac{1}{m}\left(\int_K x_k \rho(x)\,\mathrm{d}x\right), \qquad k = 1, 2, 3,$$

mit der Gesamtmasse $m := \int_K \rho(x)\,\mathrm{d}x$. Berechnen Sie für $a > 0$ und $\rho \equiv 1$ den Schwerpunkt des Kugeloktanten

$$K = \left\{ x \in (0, \infty)^3 \,:\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < a^2 \right\}$$

mit Hilfe einer geeigneten Transformation.

Aufgabe 2: (L_p-Räume, Inklusionen)

a) Betrachten Sie für $\Omega := (0, 1)$ den Maßraum $(\Omega, \mathcal{A} := \mathcal{L}_1|_\Omega, \mu := \lambda_1|_\Omega)$ und zeigen Sie, dass die Inklusion $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \subseteq L_q(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ für $1 \leq q < p \leq \infty$ strikt ist.

b) Geben Sie einen Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ an, so dass für alle $1 \leq q < p \leq \infty$ sowohl $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \nsubseteq L_q(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ als auch $L_q(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \nsubseteq L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ gilt.

Hinweis: Betrachten Sie Funktionen vom Typ $x \mapsto |x|^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3: (L_p-Räume, Inklusionen)
Seien $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $m := \inf \{ \mu(A) \,:\, A \in \mathcal{A},\ \mu(A) > 0 \} \in [0, \infty]$. Zeigen Sie:

a) Ist $m > 0$, dann gibt es für jede μ-integrierbare Funktion $f : \Omega \longrightarrow \bar{\mathbb{R}}$ ein $C > 0$ so, dass $\mu(\{ |f| > C \}) = 0$.

b) Ist $m > 0$, dann gilt $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \subseteq L_q(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ für $1 \leq p < q \leq \infty$.

Hinweis: In Teil b) sollte der Fall $q = \infty$ separat betrachtet werden.

Bemerkungen: Für $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$ mit dem Zählmaß μ ist $m = 1$. Dies liefert die bekannten Inklusionen

$$\ell_1 \subseteq \ell_p \subseteq \ell_q \subseteq \ell_\infty, \qquad 1 \leq p < q \leq \infty.$$

Mit Hilfe von Übungsaufgabe 4 (und funktionalanalytischen Mitteln) kann auch die Umkehrung von Teil b) gezeigt werden: Gilt die Inklusion $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \subseteq L_q(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ für ein Wertepaar $(p, q) \in [1, \infty]^2$ mit $p < q$, dann ist $m > 0$.

Aufgabe 4: (L_p-Räume, Konvergenz)
Geben Sie ein Beispiel für einen Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ an, so dass folgendes gilt:
Sind $1 \leq p, q \leq \infty$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \cap L_q(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und konvergiert die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ gegen ein $f \in L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, so muss sie *nicht* gleichzeitig in $L_q(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ gegen ein $g \in L_q(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ konvergieren.

Hinweis: Betrachten Sie die Maßräume und Funktionen aus Präsenzaufgabe 2.