Übungsblatt 11

Analysis III, WiSe 2018/2019

Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

HEINRICH HEINE UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Ausgabe: Di., 08.01.2019, Abgabe: Di., 15.01.2019

B **Aufgabe 1:** (Untermannigfaltigkeiten, 4 Punkte)
Sei $\gamma : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben als $\gamma(t) = 0$ für $-1 < t \leq 0$ und $\gamma(t) = t^2$ für $0 < t < 1$. Zeigen Sie, dass $M := \operatorname{graph}(\gamma)$ eine eindimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ ist, aber keine C^2-Untermannigfaltigkeit.

B **Aufgabe 2:** (Tangentialräume, $6 + 2$ Punkte)
Betrachten Sie die Wendelfläche $M := \psi(\mathbb{R}^2)$, wobei $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben ist als

$$\psi(s, t) := (s\cos(t),\ s\sin(t),\ t), \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

a) Zeigen Sie, dass M eine zweidimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Bestimmen Sie für $s, t \in \mathbb{R}$ eine Basis des Tangentialraums T_pM am Punkt $p = \psi(s, t)$.

Hinweise: Für Teil a) geben Sie einen C^∞-Diffeomorphismus $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ an, so dass $\varphi(M) = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$.
Für Teil b) betrachten Sie geeignete Kurven γ, die in M durch den Punkt p verlaufen.

B **Aufgabe 3:** (Tangentialräume, $6 + 2$ Punkte)
Betrachten Sie für $0 < \rho < r$ den Ringtorus $M := \psi(\mathbb{R}^2)$, wobei $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben ist als

$$\psi(s, t) := ((r + \rho\cos(s))\cos(t),\ (r + \rho\cos(s))\sin(t),\ \rho\sin(s)), \qquad s, t \in \mathbb{R}.$$

a) Zeigen Sie, dass M eine zweidimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Bestimmen Sie für $s, t \in \mathbb{R}$ eine Basis des Tangentialraums T_pM am Punkt $p = \psi(s, t)$.

Hinweise: Für Teil a) geben Sie eine C^∞-Abbildung $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ an, so dass $M = g^{-1}(c)$, wobei $c \in \mathbb{R}$ ein regulärer Wert von g ist.

Für Teil b) beachten Sie Satz 13.11.

Aufgabe 4: (Die Mannigfaltigkeit $\mathcal{O}(n)$)
Betrachten Sie für $n \in \mathbb{N}$ die Abbildung $f : \mathbb{R}^{n\times n} \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times n}_{\mathrm{sym}}$, die gegeben ist als $f(X) = X^\mathsf{T}X$ für $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

a) Zeigen Sie, dass f stetig differenzierbar ist, wobei $f'(X) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n\times n}, \mathbb{R}^{n\times n}_{\mathrm{sym}})$ für $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben ist als $f'(X)B = B^\mathsf{T}X + X^\mathsf{T}B$ für $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

b) Zeigen Sie, dass $\mathcal{O}(n) = f^{-1}(I)$, und, dass $f'(X) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^{n\times n}, \mathbb{R}^{n\times n}_{\mathrm{sym}})$ surjektiv ist für alle $X \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Folgern Sie, dass $\mathcal{O}(n)$ eine $\frac{1}{2}n(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^{n\times n}$ ist.

c) Zeigen Sie, dass $T_I\mathcal{O}(n) = \mathfrak{so}(n) := \{ A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A^\mathsf{T} = -A \}$.

d) Zeigen Sie, dass $T_I^\perp\mathcal{O}(n) = \mathbb{R}^{n\times n}_{\mathrm{sym}}$.

Hinweis: Auf $\mathbb{R}^{n\times n}$ betrachtet man das Standard-Skalarprodukt $A{:}B = \sum_{j,k=1}^n a_{jk}b_{jk}$ für $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Präsenzaufgaben

Analysis III, WiSe 2018/2019

Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

Bearbeitung: Mi./Do., 09./10.01.2019

Aufgabe 1: (Untermannigfaltigkeiten)
Seien $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ und $M := \{\, x \in \mathbb{R}^n \,:\, \|x\|_2 = 1,\ x_n > 0 \,\}$.

a) Geben Sie $m \in \mathbb{N}$, $\ell \in \mathbb{N} \cup \{\,\infty\,\}$, offene Mengen $U,\, V \subseteq \mathbb{R}^n$ und einen C^ℓ-Diffeomorphismus $\varphi : U \longrightarrow V$ an, so dass $M \subseteq U$ und $\varphi(M) = V \cap (\mathbb{R}^m \times \{\,0\,\})$.

b) Geben Sie $m \in \mathbb{N}$, $\ell \in \mathbb{N} \cup \{\,\infty\,\}$, eine offene Menge $D \subseteq \mathbb{R}^m$ und $f \in C^\ell(D,\, \mathbb{R}^{n-m})$ an mit $M = \operatorname{graph}(f)$.

c) Geben Sie $k \in \mathbb{N}$, $\ell \in \mathbb{N} \cup \{\,\infty\,\}$, eine offene Menge $W \subseteq \mathbb{R}^n$ und $g \in C^\ell(W,\, \mathbb{R}^k)$ an, so dass 0 ein regulärer Wert von g ist und $M = g^{-1}(0)$.

Welche Bedeutungen haben m, k und ℓ?

Aufgabe 2: (Tangentialräume)
Betrachten Sie für $0 < \rho < r$ das „Spiralband“ $M := \psi(W)$, wobei $\psi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben ist als

$$\psi(s,\, t) := ((r + \rho\cos(s))\cos(t),\ (r + \rho\cos(s))\sin(t),\ t), \qquad s,\, t \in \mathbb{R}.$$

und $W := (0,\, \pi) \times \mathbb{R}$.

a) Zeigen Sie, dass M eine zweidimensionale C^∞-Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Bestimmen Sie für $(s,\, t) \in W$ eine Basis des Tangentialraums T_pM am Punkt $p = \psi(s,\, t)$.

Hinweise: Für Teil a) geben Sie offene Mengen $U,\, V \subseteq \mathbb{R}^3$ und einen C^∞-Diffeomorphismus $\varphi : U \longrightarrow V$ an, so dass $M \subseteq U$ und $\varphi(M) = V \cap (\mathbb{R}^2 \times \{\,0\,\})$.

Für Teil b) betrachten Sie geeignete Kurven γ, die in M durch den Punkt p verlaufen.

Zur Konstruktion von U, V und φ gehen Sie wie folgt vor:

(i) Konstruieren Sie zunächst eine C^∞-Abbildung $\Phi = (\xi,\, \eta,\, \zeta) : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ und stellen Sie dabei sicher, dass $\Phi(M) \subseteq \mathbb{R}^2 \times \{\,0\,\}$, z. B. durch die Wahl $\zeta(x,\, y,\, z) := y\cos(z) - x\sin(z)$ für $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$.

(ii) Stellen Sie sicher, dass Φ bijektiv ist mit $\det \Phi' \neq 0$, z. B. durch die Wahlen $\xi(x,\, y,\, z) := x\cos(z) + y\sin(z)$ und $\eta(x,\, y,\, z) = z$ für $(x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3$.

(iii) Bestimmen Sie $\Phi(M)$ und eine offene Menge $V \subseteq \mathbb{R}^3$ mit $\Phi(M) = V \cap (\mathbb{R}^2 \times \{\,0\,\})$.

(iv) Setzen Sie $U := \Phi^{-1}(V)$ und $\varphi := \Phi|_U$.