

Übungsblatt 12

Analysis III, WiSe 2018/2019

Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

Ausgabe: Di., 15.01.2019, Abgabe: Di., 22.01.2019

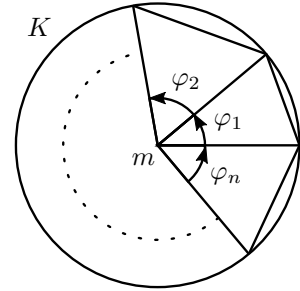
B Aufgabe 1: (Extrema unter Nebenbedingungen, 4 Punkte)

Sei $n \geq 3$. Bestimmen Sie mit Hilfe der Multiplikatorregel von Lagrange den Flächeninhalt des größten in den Einheitskreis

$$K := \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1 \}$$

einbeschriebenen Polygons mit n Ecken.

HINWEIS: Ein in K einbeschriebenes Polygon mit n Ecken, das den Mittelpunkt $m = (0, 0)$ von K enthält, ist durch die n Mittelpunktswinkel $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ (bis auf Rotation) eindeutig bestimmt. Wie hängt der Flächeninhalt des Polygons von den φ_k ab? Welche Nebenbedingung erfüllen die φ_k ?



B Aufgabe 2: (Extrema unter Nebenbedingungen, 6 Punkte)

Betrachten Sie die Funktionen $f, g : (0, \infty)^n \rightarrow \mathbb{R}$, die gegeben sind als

$$f(x) := \prod_{k=1}^n x_k, \quad g(x) := \sum_{k=1}^n x_k, \quad x_1, \dots, x_n > 0,$$

und bestimmen Sie mit Hilfe der Multiplikatorregel von Lagrange alle Extremstellen x von f unter der Nebenbedingung $g(x) = 1$.

HINWEIS: Sie können die Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel verwenden:

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + \dots + x_n), \quad x_1, \dots, x_n \geq 0$$

B Aufgabe 3: (Weglänge, 3+3 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils die Weglänge $L(\gamma)$ des Weges

a) $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, wobei $a < b$ und $\gamma(t) := (e^t \cos(t), e^t \sin(t))$ für $a \leq t \leq b$;

b) $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$, wobei $\gamma(t) := (t, e^t, 1 - e^t)$ für $0 \leq t \leq 1$.

B Aufgabe 4: (Parametrisierung nach Bogenlänge, 4 Punkte)

Parametrisieren Sie den Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\gamma(t) := (e^{-t/2}, \sqrt{1 - e^{-t}})$ für $0 \leq t \leq 1$ nach Bogenlänge.

Präsenzaufgaben

Analysis III, WiSe 2018/2019

Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

Bearbeitung: Mi./Do., 16./17.01.2019

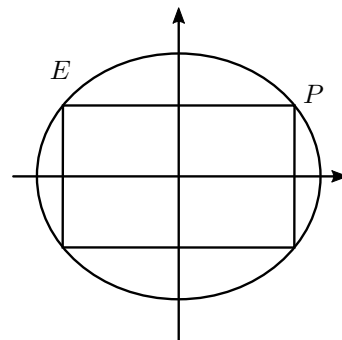
Aufgabe 1: (Extrema unter Nebenbedingungen)

Seien $a, b > 0$. Bestimmen Sie mit Hilfe der Multiplikatorregel von Lagrange den Flächeninhalt des größten in die Ellipse

$$E := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

einbeschriebenen achsenparallelen Rechtecks.

HINWEIS: Ein in E einbeschriebenes achsenparalleles Rechteck ist durch die Koordinaten $x, y > 0$ seines Eckpunkts P im oberen, rechten Quadranten eindeutig bestimmt. Wie hängt der Flächeninhalt des Rechtecks von x, y ab? Welche Nebenbedingung erfüllen x, y ?



Aufgabe 2: (Weglänge)

Bestimmen Sie die Weglänge $L(\gamma)$ des Weges $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, wobei

$$\gamma(t) := \left(\sin(t), \frac{1}{4} \sin(2t) - \frac{1}{2}t, \frac{1}{2} \cos^2(t) \right)$$

für $0 \leq t \leq 2\pi$.

Aufgabe 3: (Parametrisierung nach Bogenlänge)

Seien $r, h > 0$. Parametrisieren Sie den Weg $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\gamma(t) := (r \cos(2\pi t), r \sin(2\pi t), ht)$ für $0 \leq t \leq 1$ nach Bogenlänge.