Übungsblatt 13

Analysis III, WiSe 2018/2019

Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

HEINRICH HEINE UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Ausgabe: Di., 22.01.2019, Abgabe: Di., 29.01.2019

B **Aufgabe 1:** (Kurvenintegrale 1. Art, $2+2$ Punkte)
Sei Γ die durch $\gamma : [0,\, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ parametrisierte Kurve, wobei $\gamma(t) := (t,\ \cosh(t))$ für $0 \le t \le 1$. Berechnen Sie für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

a) $f(x,\, y) := x$ für $(x,\, y) \in \mathbb{R}^2$ und

b) $f(x,\, y) := y$ für $(x,\, y) \in \mathbb{R}^2$

das Kurvenintegral 1. Art $\int_\Gamma f \mathrm{d}s$.

B **Aufgabe 2:** (Kurvenintegrale 2. Art, $2+2+1+1$ Punkte)
Betrachten Sie die 1-Form $\omega := f_1 \mathrm{d}x + f_2 \mathrm{d}y$ für

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{\, 0 \,\} \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad f(x,\, y) := (x^2 + y^2)^{-1}(x - y,\ x + y), \qquad (x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\, 0 \,\}.$$

a) Zeigen Sie, dass ω lokal exakt ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{\, 0 \,\}$.

b) Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\Gamma \omega$ für die durch $\gamma : [-\pi,\, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ parametrisierte Kurve Γ, wobei $\gamma(t) := (\cos(t),\ \sin(t))$ für $-\pi \le t \le \pi$.

c) Entscheiden Sie, ob ω exakt ist auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{\, 0 \,\}$.

d) Geben Sie ein Gebiet $\varnothing \ne D \subseteq \mathbb{R}^2$ an, so dass ω exakt ist auf D.

B **Aufgabe 3:** (Unabhängigkeit von Kurvenintegralen 2. Art von der Parametrisierung, $3+3$ Punkte)
Seien $\sigma : [\alpha,\, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ und $\gamma : [a,\, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ zwei C^1-Wege, $\Sigma := [\sigma]$ und $\Gamma := [\gamma]$ die durch diese Wege parametrisierten Kurven. Es existiere ein C^1-Diffeomorphismus $\phi : [a,\, b] \longrightarrow [\alpha,\, \beta]$ so, dass $\gamma = \sigma \circ \phi$.

a) Sei ϕ streng monoton wachsend – d. h. $\Gamma = \Sigma$ als orientierte Kurven. Zeigen Sie: Für jede stetige 1-Form $\omega = f \cdot \mathrm{d}x : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ gilt $\int_\Gamma \omega = \int_\Sigma \omega$.

b) Sei ϕ streng monoton fallend – d. h. $\Gamma = -\Sigma$ als orientierte Kurven. Zeigen Sie: Für jede stetige 1-Form $\omega = f \cdot \mathrm{d}x : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ gilt $\int_\Gamma \omega = -\int_\Sigma \omega$.

Hinweise: Die an γ geforderten Eigenschaften bedeuten gerade, dass γ stetig ist auf $[a,\, b]$, differenzierbar ist auf $(a,\, b)$, und, dass γ' eine stetige Fortsetzung auf $[a,\, b]$ besitzt.

Die an ϕ geforderten Eigenschaften bedeuten gerade, dass ϕ ein Homöomorphismus zwischen $[a,\, b]$ und $[\alpha,\, \beta]$ ist, differenzierbar ist auf $(a,\, b)$, und, dass ϕ' eine stetige Fortsetzung auf $[a,\, b]$ besitzt.

B **Aufgabe 4:** (Potentiale, $2+2$ Punkte)
Sei $g : (0,\, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und sei $f : \mathbb{R}^n \setminus \{\, 0 \,\} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben als $f(x) := g(|x|^2)x$ für $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\, 0 \,\}$.

a) Zeigen Sie, dass f ein Potential auf $\mathbb{R}^n \setminus \{\, 0 \,\}$ hat.

b) Geben Sie für den Fall $g(t) = t^{-m}$ für $t > 0$ mit $m \in \mathbb{N}$ ein Potential für f auf $\mathbb{R}^n \setminus \{\, 0 \,\}$ an.

Präsenzaufgaben

Analysis III, WiSe 2018/2019

Prof. Dr. Jürgen Saal, Dr. Matthias Köhne

HEINRICH HEINE UNIVERSITÄT DÜSSELDORF

Bearbeitung: Mi./Do., 23./24.01.2019

Aufgabe 1: (Kurvenintegrale 1. Art)
Sei Γ die durch $\gamma : [0,\, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ parametrisierte Kurve, wobei $\gamma(t) := (t,\ t^2)$ für $0 \leq t \leq 1$. Berechnen Sie für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

a) $f(x,\, y) := 2x$ für $(x,\, y) \in \mathbb{R}^2$ und

b) $f(x,\, y) := \sqrt{1 + 4|y|}$ für $(x,\, y) \in \mathbb{R}^2$

das Kurvenintegral 1. Art $\int_\Gamma f \mathrm{d}s$.

Aufgabe 2: (Kurvenintegrale 2. Art)
Betrachten Sie die 1-Form $\omega := f_1 \mathrm{d}x + f_2 \mathrm{d}y$ für

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \qquad f(x,\, y) := (x^2 + y^2,\ 2xy), \qquad (x,\, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_\Gamma \omega$

a) mit Hilfe von Satz 15.17 und

b) mit Hilfe von Satz 15.22

für die durch $\gamma : [-\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ parametrisierte Kurve Γ, wobei $\gamma(t) := (\cos(t),\ \sin(t))$ für $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Aufgabe 3: (Unabhängigkeit von Kurvenintegralen 1. Art von der Parametrisierung)
Seien $\sigma : [\alpha,\, \beta] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ und $\gamma : [a,\, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ zwei C^1-Wege, $\Sigma := [\sigma]$ und $\Gamma := [\gamma]$ die durch diese Wege parametrisierten Kurven. Es existiere ein C^1-Diffeomorphismus $\phi : [a,\, b] \longrightarrow [\alpha,\, \beta]$ so, dass $\gamma = \sigma \circ \phi$.

a) Sei ϕ streng monoton wachsend – d. h. $\Gamma = \Sigma$ als orientierte Kurven. Zeigen Sie: Für jede stetige Funktion $f : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ gilt $\int_\Gamma f \mathrm{d}s = \int_\Sigma f \mathrm{d}s$.

b) Sei ϕ streng monoton fallend – d. h. $\Gamma = -\Sigma$ als orientierte Kurven. Zeigen Sie: Für jede stetige Funktion $f : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ gilt $\int_\Gamma f \mathrm{d}s = \int_\Sigma f \mathrm{d}s$.

Hinweise: Die an γ geforderten Eigenschaften bedeuten gerade, dass γ stetig ist auf $[a,\, b]$, differenzierbar ist auf $(a,\, b)$, und, dass γ' eine stetige Fortsetzung auf $[a,\, b]$ besitzt.

Die an ϕ geforderten Eigenschaften bedeuten gerade, dass ϕ ein Homöomorphismus zwischen $[a,\, b]$ und $[\alpha,\, \beta]$ ist, differenzierbar ist auf $(a,\, b)$, und, dass ϕ' eine stetige Fortsetzung auf $[a,\, b]$ besitzt.

$\int_\Gamma \cdot \, \mathrm{d}s$ bezeichnet das Kurvenintegral 1. Art.