

Analysis I

Wintersemester 2025/2026

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Übungsblatt 2

Ausgabe: Fr., 24.10.2025, 14:00 Uhr
Abgabe: Mo., 03.11.2025, 18:00 Uhr
Besprechung: Di., 04.11.2021 bzw. Mi., 05.11.2021

Ⓑ **Aufgabe 2.1:** (Differenz, Durchschnitt und Vereinigung, 2 + 3 + 3 Punkte)

Seien A , B und C Mengen. Verifizieren Sie die folgenden Regeln und visualisieren Sie die betrachteten Mengen jeweils mit Hilfe eines Venn-Diagramms.

- (a) $A \cup B = B \cup A$.
- (b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.
- (c) $A \setminus (B \cup C) = A \setminus B \cap A \setminus C$.

Hinweis: Gehen Sie vor wie in 1.1.17. Sie können dabei die De'Morgan'schen Regeln und alle Regeln verwenden, die im Rahmen von EX 1.4 und EX 1.5 gezeigt werden.

Aufgabe 2.2: (Äquivalenzrelationen)

Seien A eine Menge, $\mathcal{R}$ eine Äquivalenzrelation auf A und $x, y \in A$. Zeigen Sie, dass entweder $[x]_{\mathcal{R}} \cap [y]_{\mathcal{R}} = \emptyset$ oder $[x]_{\mathcal{R}} = [y]_{\mathcal{R}}$.

Bemerkung: Eine Relation $\mathcal{R}$ auf A heißt Äquivalenzrelation auf A , falls $\mathcal{R}$ reflexiv, symmetrisch und transitiv ist. In diesem Fall wird für $x \in A$ die Menge $[x]_{\mathcal{R}} := \{y \in A : x \mathcal{R} y\}$ als die von x erzeugte Äquivalenzklasse bezeichnet; vgl. Bsp. 1.1.30.

Ⓑ **Aufgabe 2.3:** (Abbildungen, 4 Punkte)

Sei A eine endliche Menge mit $m \in \mathbb{N}$ Elementen und sei B eine endliche Menge mit $n \in \mathbb{N}$ Elementen. Zeigen Sie, dass $\text{Map}(A, B)$ eine endliche Menge ist und bestimmen Sie die Anzahl ihrer Elemente.

Aufgabe 2.4: (Abbildungseigenschaften)

Betrachten Sie die Abbildung

$$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad f(m, n) := 2^{m-1}(2n - 1), \quad m, n \in \mathbb{N},$$

und zeigen Sie, dass f bijektiv ist.

Hinweis: Sie können (ohne Beweis) die folgende Tatsache verwenden: Eine natürliche Zahl $N \in \mathbb{N}$ ist genau dann ungerade, wenn es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $N = 2n - 1$.