Analysis I
Wintersemester 2025/2026

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Übungsblatt 3

Ausgabe:	Fr., 31.10.2025, 14:00 Uhr
Abgabe:	Mo., 10.11.2025, 18:00 Uhr
Besprechung:	Di., 11.11.2025 bzw. Mi., 12.11.2025

Ⓑ **Aufgabe 3.1:** (Abbildungseigenschaften, $3 + 3$ Punkte)
Seien A, B und C nicht leere Mengen und $f : A \longrightarrow B$ sowie $g : B \longrightarrow C$ Abbildungen. Zeigen Sie:

(a) Ist $g \circ f : A \longrightarrow C$ injektiv, dann ist f injektiv.

(b) Ist $g \circ f : A \longrightarrow C$ injektiv und ist f surjektiv, dann ist g injektiv.

Bemerkung: Dies sind die Aussagen (b) und (c) in Proposition 1.1.37.

Aufgabe 3.2: (Abbildungseigenschaften)
Geben Sie jeweils ein Beispiel an für nicht leere Mengen A, B und C sowie für Abbildungen $f : A \longrightarrow B$ und $g : B \longrightarrow C$, so dass Folgendes gilt:

(a) $g \circ f : A \longrightarrow C$ und f sind injektiv, aber g ist nicht injektiv.

(b) $g \circ f : A \longrightarrow C$ und g sind surjektiv, aber f ist nicht surjektiv.

Ⓑ **Aufgabe 3.3:** (Abbildungen und Inverse, 6 Punkte)
Betrachten Sie die Abbildung $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, die gegeben ist als

$$f(n) := \begin{cases} n+1, & \text{falls } n \text{ ungerade ist,} \\ n-1, & \text{falls } n \text{ gerade ist,} \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass f bijektiv ist, und bestimmen Sie $f^{-1} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$.

Aufgabe 3.4: (Bilder und Urbilder)
Seien A und B Mengen, seien $U, V \subseteq A$, seien $X, Y \subseteq B$ und sei $f : A \longrightarrow B$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $f(U \cap V) \subseteq f(U) \cap f(V)$.

(b) Es gilt $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$.

Zeigen Sie weiter, dass $f(U \cap V) = f(U) \cap f(V)$, wenn f injektiv ist.

Bemerkung: Es gelten ebenfalls $f(U \cup V) = f(U) \cup f(V)$ sowie $f^{-1}(X \cup Y) = f^{-1}(X) \cup f^{-1}(Y)$ ohne weitere Voraussetzungen an f.

Aufgabe 3.5: (Bilder und Urbilder)
Geben Sie jeweils ein Beispiel an für nicht leere Mengen A und B sowie für eine Abbildung $f : A \longrightarrow B$ und eine Menge $X \subseteq B$, so dass Folgendes gilt:

(a) $X \neq \varnothing$ und $f(f^{-1}(X)) = \varnothing$.

(b) $X \neq \varnothing$ und $f(f^{-1}(X)) = X$.

Bemerkung: Es gilt stets $f(f^{-1}(X)) \subseteq X$.