Analysis I
Wintersemester 2025/2026
Übungsblatt 4

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Ausgabe:	Fr., 07.11.2025, 14:00 Uhr
Abgabe:	Mo., 17.11.2025, 18:00 Uhr
Besprechung:	Di., 18.11.2025 bzw. Mi., 19.11.2025

Aufgabe 4.1: (Verkettungen)
Seien A, B und C nicht leere Mengen und $f : A \longrightarrow B$ sowie $g : B \longrightarrow C$ Abbildungen. Zeigen Sie:

(a) Für alle $Z \subseteq C$ gilt $(g \circ f)^{-1}(Z) = f^{-1}(g^{-1}(Z))$.

(b) Sind f und g invertierbar, dann ist auch $g \circ f$ invertierbar mit $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

Ⓑ **Aufgabe 4.2:** (Abzählbarkeit, $2 + 4$ Punkte)
Zeigen Sie:

(a) Die Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ist abzählbar.

(b) Sind A und B abzählbare Mengen, dann ist auch $A \times B$ abzählbar.

Hinweis: Für Teil (a) beachten Sie Aufgabe 2.4. Für Teil (b) orientieren Sie sich am Beweis von Proposition 1.1.49 (b). Sie können ohne Einschränkung annehmen, dass $A \neq \varnothing$ und $B \neq \varnothing$ ist, da sonst $A \times B = \varnothing$ gelten würde.

Ⓑ **Aufgabe 4.3:** (Potenzmengen, 6 Punkte)
Sei A eine endliche Menge mit $n \in \mathbb{N}$ Elementen. Konstruieren Sie eine bijektive Abbildung

$$f : \mathrm{Map}(A, \{\, 0, 1 \,\}) \longrightarrow \mathcal{P}(A).$$

Folgern Sie, dass $\mathcal{P}(A)$ eine endliche Menge mit 2^n Elementen ist.

Hinweis: Beachten Sie Aufgabe 2.3.

Aufgabe 4.4: (Halbordnungen)
Sei A eine Menge. Zeigen Sie, dass durch die Relation $\subseteq$ eine Halbordnung auf $\mathcal{P}(A)$ gegeben ist. Zeigen Sie weiter, dass es sich dabei *nicht* um eine totale Ordnung handelt, falls A mindestens zwei Elemente hat.

Aufgabe 4.5: (Vollständige Induktion)
Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $2 + 4 + \ldots + 2n = n(n + 1)$.

(b) Es gilt $1 + 3 + \ldots + (2n - 1) = n^2$.

(c) Es gilt $1 + 8 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$.

Hinweis: Für die Teile (a) und (b) können Sie verwenden, dass $1 + 2 + \ldots + m = \frac{1}{2}m(m + 1)$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ gilt. Verwenden Sie diese Formel zusammen mit einer vollständigen Induktion nach n auch für Teil (c).