

Analysis I

Wintersemester 2025/2026

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Übungsblatt 6

Ausgabe: Fr., 21.11.2025, 14:00 Uhr
Abgabe: Mo., 01.12.2025, 18:00 Uhr
Besprechung: Di., 02.12.2025 bzw. Mi., 03.12.2025

Aufgabe 6.1: (Kommutative, unitäre Ringe)

Sei $A \neq \emptyset$ eine Menge. Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}(A), \triangle, \cap)$ ein kommutativer, unitärer Ring ist, wobei $0_{\mathcal{P}(A)} = \emptyset$ und $1_{\mathcal{P}(A)} = A$. Gelten die Gesetze (O_1) und (O_2) für die Halbordnung $\subseteq$ auf $\mathcal{P}(A)$?

Hinweis: Die Eigenschaften (A_1) , (M_1) und (M_2) werden im Rahmen anderer Übungsaufgaben (vgl. EX 1.5) gezeigt und müssen hier nicht nachgewiesen werden. Auch auf den Nachweis der Eigenschaft (A_2) dürfen Sie hier verzichten. Die Eigenschaft (D_2) folgt sofort aus (M_1) und (D_1) .

Bemerkung: Hat A mindestens zwei Elemente, dann gibt es Mengen $X, Y \in \mathcal{P}(A)$ mit $X \neq \emptyset = 0_{\mathcal{P}(A)}$ und $Y \neq \emptyset = 0_{\mathcal{P}(A)}$ sowie $X \odot Y = X \cap Y = \emptyset = 0_{\mathcal{P}(A)}$. Der Ring $(\mathcal{P}(A), \triangle, \cap)$ ist dann also nicht nullteilerfrei.

ⓑ Aufgabe 6.2: (Geordnete, kommutative, unitäre Ringe, 2 + 1 + 1 + 1 + 1 Punkte)

Sei $(R, \oplus, \odot, \trianglelefteq)$ geordneter, kommutativer, unitärer Ring. Zeigen Sie, dass für alle $x, y, z, w \in R$ gilt:

(a) Ist $x \trianglelefteq y$ und $z \trianglelefteq w$, dann ist $x \oplus z \trianglelefteq y \oplus w$.

(b) Genau dann ist $0_R \trianglelefteq x$, wenn $\ominus x \trianglelefteq 0_R$.

(c) Ist $x \trianglelefteq y$, dann ist $\ominus y \trianglelefteq \ominus x$.

(d) $0_R \trianglelefteq x \odot x$.

(e) $0_R \trianglelefteq 1_R$.

Hinweis: Sie können zum Beweis die Eigenschaften 1.3.2 $(A_1) - (A_4)$, $(M_1) - (M_3)$, (D_1) , (D_2) , (O_1) und (O_2) sowie die Aussagen 1.3.4 (a) – (d), 1.3.5 (a) – (d) und 1.3.6 (a), (e) – (l) verwenden.

ⓑ Aufgabe 6.3: (Binominalkoeffizienten, 2 + 4 Punkte)

(a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

Für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ und jedes $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ ist $n!$ durch $k!(n-k)!$ teilbar.

(b) Für $n \in \mathbb{N}_0$ und $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ ist der *Binominalkoeffizient* definiert als

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$ die folgenden Rechenregeln:

$$(i) \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad (ii) \quad \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Hinweis: Nutzen Sie für Teil (a) die Darstellung $(n+1)! = (n+1-k)n! + kn!$.

Aufgabe 6.4: (Binomische Formel)

Sei $(F, \oplus, \odot)$ ein Körper. Zeigen Sie durch vollständige Induktion (nach n):

$$(x \oplus y)^n = \bigoplus_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot x^{n-k} \odot y^k, \quad x, y \in F, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Aufgabe 6.5: (Minimum und Maximum)

Sei A eine Menge, sei $\trianglelefteq$ eine Ordnung auf A und sei $B \subseteq A$ eine Menge mit $n \in \mathbb{N}$ Elementen. Zeigen Sie, dass $\min(B)$ und $\max(B)$ existieren.

Hinweis: Argumentieren Sie durch vollständige Induktion nach n .