Analysis I
Wintersemester 2025/2026

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Übungsblatt 7

Ausgabe:	Fr., 28.11.2025, 14:00 Uhr
Abgabe:	Mo., 08.12.2025, 18:00 Uhr
Besprechung:	Di., 09.12.2025 bzw. Mi., 10.12.2025

Aufgabe 7.1: (Infimum und Supremum)
Sei A eine Menge, sei $\trianglelefteq$ eine Ordnung auf A und seien $\varnothing \neq B,\, C \subseteq A$ so, dass $\inf(B)$ und $\inf(C)$ existieren. Zeigen Sie:

(a) Gilt $B \subseteq C$, dann ist $\inf(C) \trianglelefteq \inf(B)$.

(b) Existiert $\inf(B \cup C)$, dann gilt $\min\{\inf(B),\, \inf(C)\} = \inf(B \cup C)$.

(c) Ist $B \cap C \neq \varnothing$ und existiert $\inf(B \cap C)$, dann gilt $\max\{\inf(B),\, \inf(C)\} \trianglelefteq \inf(B \cap C)$.

Aufgabe 7.2: (Signum und Betrag)
Zeigen Sie, dass für Signum $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \longrightarrow \{-1,\, 0,\, 1\}$ und Betrag $|\cdot| : \mathbb{R} \longrightarrow [0,\, \infty)$ gilt:

$$x = |x| \operatorname{sgn}(x), \qquad |x| = x \operatorname{sgn}(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

sowie

$$|x + y| \leq |x| + |y|, \qquad \big||x| - |y|\big| \leq |x - y|, \qquad x,\, y \in \mathbb{R}.$$

Ⓑ **Aufgabe 7.3:** (Komplexe Zahlen, $4 + 2 + 2$ Punkte)
Sei $(\mathbf{C},\, +,\, \cdot\,)$ definiert wie in 1.3.45, d. h. $\mathbf{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und

$$\begin{aligned} (x,\, y) \ + \ (u,\, v) &:= (x + u,\, y + v), \\ (x,\, y) \ \cdot \ (u,\, v) &:= (xu - yv,\, xv + yu), \end{aligned} \qquad (x,\, y),\ (u,\, v) \in \mathbf{C}.$$

Zeigen Sie:

(a) Die Verknüpfungen $+,\, \cdot : \mathbf{C} \times \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ sind kommutativ, d. h. es gilt

$$(x,\, y) + (u,\, v) = (u,\, v) + (x,\, y), \qquad (x,\, y) \cdot (u,\, v) = (u,\, v) \cdot (x,\, y), \qquad (x,\, y),\ (u,\, v) \in \mathbf{C}.$$

(b) Die Elemente $(0,\, 0) \in \mathbf{C}$ bzw. $(1,\, 0) \in \mathbf{C}$ sind die neutralen Elemente bzgl. $+$ bzw. $\cdot$.

(c) Das multiplikativ Inverse zu $(x,\, y) \in \mathbf{C} \setminus \{(0,\, 0)\}$ ist gegeben als

$$(x,\, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2},\ -\frac{y}{x^2 + y^2}\right) \in \mathbf{C}.$$

Ⓑ **Aufgabe 7.4:** (Monotone Funktionen, 4 Punkte)
Seien $a,\, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ und sei $f : [a,\, b] \longrightarrow [a,\, b]$ monoton wachsend. Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt $x^* \in [a,\, b]$ hat, d. h. es gilt $f(x^*) = x^*$.

Hinweis: Betrachten Sie dann die Menge $A := \{x \in [a,\, b] \,:\, x \leq f(x)\}$ und zeigen Sie, dass A nicht leer und von oben beschränkt ist. Betrachten Sie den Punkt $x^* := \sup A$.

Aufgabe 7.5: (Bernoulli'sche Ungleichung)
Sei $x \geq -1$. Zeigen Sie, dass

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Hinweis: Argumentieren Sie mit Hilfe einer vollständigen Induktion (nach n).