Analysis I
Wintersemester 2025/2026

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Übungsblatt 8

Ausgabe: Fr., 05.12.2025, 14:00 Uhr
Abgabe: Mo., 15.12.2025, 18:00 Uhr
Besprechung: Di., 16.12.2025 bzw. Mi., 17.12.2025

Ⓑ **Aufgabe 8.1:** (Komplexe Zahlen: Arithmetik, $2+2+2$ Punkte)

(a) Berechnen Sie jeweils $z+w,\ zw \in \mathbb{C}$ für

$$\text{(i)} \quad z = \tfrac{1}{\sqrt{5}}(2+i) \quad \text{und} \quad w = \tfrac{3}{2} + 2i \qquad\qquad \text{(ii)} \quad z = \tfrac{1}{\sqrt{10}}(3-i) \quad \text{und} \quad w = -i.$$

(b) Stellen Sie jeweils die Zahl $z \in \mathbb{C}$ in der Form $z = x + iy$ mit $x,\ y \in \mathbb{R}$ dar für

$$\text{(i)} \quad z = \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^4 \qquad\qquad \text{(ii)} \quad z = (1+i)^{2n} + (1-i)^{2n} \quad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}.$$

(c) Sei $z = x + iy \in \mathbb{C} \setminus \{\,0\,\}$ mit $x,\ y \in \mathbb{R}$. Stellen Sie die Zahl $w \in \mathbb{C}$ dar als $w = u + iv$ mit $u,\ v \in \mathbb{R}$ für

$$\text{(i)} \quad w = z + (\bar{z})^{-1} \qquad\qquad \text{(ii)} \quad w = (\bar{z})^2 + \tfrac{1}{z^2}.$$

Ⓑ **Aufgabe 8.2:** (Folgen und Grenzwerte, $1+1+1+1+1+1$ Punkte)
Untersuchen Sie die Folge $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ jeweils auf Konvergenz und geben Sie ggf. den Grenzwert an für

(a) $z_k := \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$, (b) $z_k := \frac{2^k + (-3)^k}{(-2)^k + 3^k}$,

(c) $z_k := \frac{k^2}{k^2+2k+2}$, (d) $z_k := \sqrt[k]{k}$,

(e) $z_k := \frac{i^k}{i+k^2}$, (f) $z_k := \frac{i^k(1+k)}{2+k}$.

Hinweis: Betrachten Sie bei (d) die Folge $(w_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ mit $w_k := z_k - 1$ für $k \in \mathbb{N}$, berechnen Sie $(1+w_k)^k = z_k^k = k$ mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes und schätzen Sie damit w_k nach oben ab. Sie können (ohne Beweis) verwenden, dass $(\frac{1}{\sqrt{k}})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

Aufgabe 8.3: (Folgen und Grenzwerte)
Seien $(z_k)_{k\in\mathbb{N}},\ (w_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ mit $w_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Aussagen

(a) $\lim_{k\to\infty}(z_k - w_k) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty} \frac{z_k}{w_k} = 1$,

(b) $\lim_{k\to\infty} \frac{z_k}{w_k} = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{k\to\infty}(z_k - w_k) = 0$

falsch sind. Unter welchen zusätzlichen Voraussetzungen an $(w_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sind diese Aussagen wahr?

Aufgabe 8.4: (Konvergenz des arithmetischen Mittels)
Sei $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ konvergent gegen $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} z_k \to z \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Hinweis: Sie können (ohne Beweis) die folgende Form der Dreiecksungleichung verwenden: Für $n \in \mathbb{N}$ und $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n \in \mathbb{C}$ ist $|\sum_{k=1}^{n} a_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$.

Aufgabe 8.5: (Komplexe Zahlen: Unmöglichkeit der Ordnung)
Der Körper $(\mathsf{C},\ +,\ \cdot)$ sei definiert wie in 1.3.45. Zeigen Sie, dass es keine Ordnung $\trianglelefteq$ auf C gibt, so dass $(\mathsf{C},\ +,\ \cdot,\ \trianglelefteq)$ ein geordneter Körper ist.

Hinweis: Beachten Sie Proposition 1.3.6 und die Tatsache, dass $(0,\ 1)^2 = -(1,\ 0)$.