Analysis I
Wintersemester 2025/2026
Übungsblatt 9

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Ausgabe:	Fr., 12.12.2025, 14:00 Uhr
Abgabe:	Mo., 05.01.2026, 18:00 Uhr
Besprechung:	Di., 06.01.2026 bzw. Mi., 07.01.2026

Ⓑ **Aufgabe 9.1:** (Folgen und Grenzwerte, 4 Punkte)
Sei $z \in \mathbb{C}$ und $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ gegeben als $z_k := z^k$ für $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$z_k \to 0 \text{ für } k \to \infty, \text{ falls } |z| < 1, \qquad \text{und} \qquad |z_k| \to \infty \text{ für } k \to \infty, \text{ falls } |z| > 1.$$

Geben Sie jeweils ein Beispiel an für ein $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$, so dass $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert bzw. divergiert.

Hinweis: Im Fall $0 < |z| < 1$ ist $\frac{1}{|z|} = 1 + h$ mit $h > 0$ und im Fall $|z| > 1$ ist $|z| = 1 + h$ mit $h > 0$. Nutzen Sie die Bernoulli'sche Ungleichung.

Ⓑ **Aufgabe 9.2:** (Folgen und Grenzwerte, $2 + 2$ Punkte)
Zeigen Sie:

$$\text{(a)} \lim_{k\to\infty} \frac{k^m}{z^k} = 0, \qquad m \in \mathbb{N},\ z \in \mathbb{C},\ |z| > 1, \qquad\qquad \text{(b)} \lim_{k\to\infty} \frac{z^k}{k!} = 0, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Hinweis: Zeigen Sie für Teil (a) zunächst, dass die Folge $(kz^{-k})_{k\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, und argumentieren Sie dann per Induktion nach $m \in \mathbb{N}$ und mit Hilfe von Aufgabe 9.1. Für Teil (b) beachten Sie, dass es ein $m \in \mathbb{N}_0$ gibt mit $m \le 2|z| < m + 1$, und betrachten Sie dann $k \ge m + 1$.

Ⓑ **Aufgabe 9.3:** (Folgen und Grenzwerte, 4 Punkte)
Seien $a > 0$ und $x_1 \in \mathbb{R}$ mit $0 < x_1 < \frac{1}{a}$. Sei $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ rekursiv definiert durch $x_{k+1} := 2x_k - ax_k^2$ für $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass diese Folge konvergiert, und bestimmen Sie den Grenzwert.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst (per Induktion nach $k \in \mathbb{N}$, dass $0 < x_k < \frac{1}{a}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, und untersuchen Sie die Folge dann auf Monotonie.

Aufgabe 9.4: (Divergenz gegen $\pm\infty$)
Geben Sie in jedem der folgenden Fälle ein Beispiel an für Folgen $(x_k)_{k\in\mathbb{N}},\ (y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$, die die angegebenen Eigenschaften haben.

(a) $x_k \to -\infty$ und $y_k \to \infty$ für $k \to \infty$, während

- (i) $x_k + y_k \to -\infty$ für $k \to \infty$,
- (ii) $x_k + y_k \to 0$ für $k \to \infty$,
- (iii) $x_k + y_k \to \infty$ für $k \to \infty$.

(b) $x_k \to \infty$ und $y_k \to 0$ für $k \to \infty$, während

- (i) $x_k y_k \to 0$ für $k \to \infty$,
- (ii) $x_k y_k \to 1$ für $k \to \infty$,
- (iii) $x_k y_k \to \infty$ für $k \to \infty$.

Aufgabe 9.5: (Limes inferior und Limes superior)
Seien $(x_k)_{k\in\mathbb{N}},\ (y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ und $x_* := \liminf_{k\to\infty} x_k \in \bar{\mathbb{R}}$, $x^* := \limsup_{k\to\infty} x_k \in \bar{\mathbb{R}}$, $y_* := \liminf_{k\to\infty} y_k \in \bar{\mathbb{R}}$ sowie $y^* := \limsup_{k\to\infty} y_k \in \bar{\mathbb{R}}$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $x_* = \infty$ genau dann, wenn $x_k \to \infty$ für $k \to \infty$.

(b) Ist $(x_*, y_*) \notin \{ (-\infty, \infty),\ (\infty, -\infty) \}$, dann gilt $\liminf_{k\to\infty}(x_k + y_k) \ge x_* + y_*$.

(c) Ist $(x^*, y^*) \notin \{ (-\infty, \infty),\ (\infty, -\infty) \}$, dann gilt $\limsup_{k\to\infty}(x_k + y_k) \le x^* + y^*$.

Hierbei seien $\infty + a = \infty = a + \infty$ für $a \in \mathbb{R} \cup \{ \infty \}$ und $(-\infty) + a = -\infty = a + (-\infty)$ für $a \in \mathbb{R} \cup \{ -\infty \}$.