Analysis I
Wintersemester 2025/2026
Übungsblatt 10

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Ausgabe:	Fr., 19.12.2025, 14:00 Uhr
Abgabe:	Mo., 12.01.2026, 18:00 Uhr
Besprechung:	Di., 13.01.2026 bzw. Mi., 14.01.2026

Ⓑ **Aufgabe 10.1:** (Konvergenzkriterien für Folgen, $1+1$ Punkte)
Entscheiden Sie jeweils, ob die angegebene Eigenschaft die Konvergenz der Folge $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ impliziert, für

(i) $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, k_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad \forall\, k \geq k_\varepsilon : \ |z_{k+1} - z_k| < \varepsilon$,

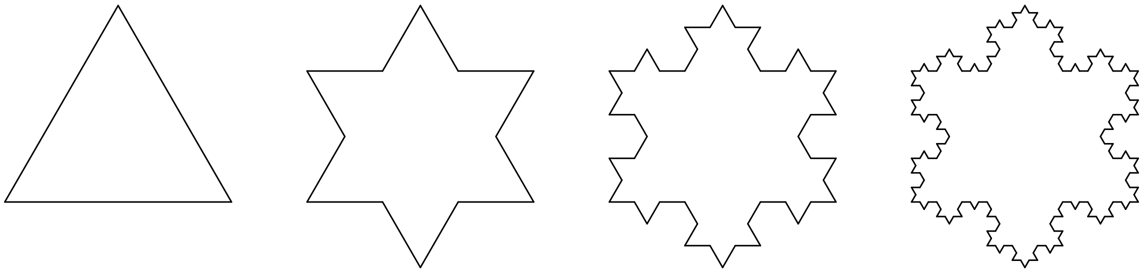
(ii) $\exists\, C > 0 \quad \exists\, k_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, k \geq k_0 : \ |z_{k+1} - z_k| < C 2^{-k}$.

Ⓑ **Aufgabe 10.2:** (Reihen und Reihenwerte, $2+2+2$ Punkte)
Berechnen Sie jeweils den Wert der folgenden Reihen:

(i) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{2^{n+k}}$, (ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2+(-1)^k}{3^k}$, (iii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+k}$.

Hinweis: Die Partialsummen in Teil (iii) lassen sich als Teleskopsummen darstellen.

Aufgabe 10.3: (Weihnachtsaufgabe)
Frau Holle hat ihr Rezept für Schneeflocken verloren! Helfen Sie ihr:



K_0 K_1 K_2 K_3

Die *Koch'sche Schneeflocke* kann wie folgt konstruiert werden: Sei K_0 ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge $a > 0$. Dann entsteht K_1 aus K_0, indem jede der 3 Seiten von K_0 in jeweils 3 gleiche Teile geteilt wird und der jeweils mittlere Teil durch zwei gleich lange neue Teile ersetzt wird, die mit dem ersetzten Teil ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge $\frac{1}{3}a$ bilden. So erhält man die Figur K_1 mit $4 \cdot 3$ Seiten der Länge $\frac{1}{3}a$. Analog entsteht K_2 aus K_1. So erhält man die Figur K_2 mit $4^2 \cdot 3$ Seiten der Länge $\frac{1}{3^2}a$. Allgemein entsteht nach dem obigen Verfahren K_n aus K_{n-1}. So erhält man die Figur K_n mit $4^n \cdot 3$ Seiten der Länge $\frac{1}{3^n}a$. Die *Koch'sche Schneeflocke* K ist dann gegeben als $K = \bigcup_{n=0}^{\infty} K_n$.

(a) Zeigen Sie, dass K keinen endlichen Umfang hat.

(b) Zeigen Sie, dass K einen endlichen Flächeninhalt hat, und berechnen Sie diesen.

Ⓑ **Aufgabe 10.4:** (Überabzählbarkeit von $\mathbb{R}$, $3+1$ Punkte)
Sei $A_k := \{ 0, 1 \}$ für $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung $f : \prod_{k=1}^{\infty} A_k \longrightarrow [0, 1]$, die gegeben ist als $f((a_k)_{k\in\mathbb{N}}) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k 3^{-k}$ für $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \{ 0, 1 \}$, ist injektiv.

(b) Die Mengen $[0, 1]$ und $\mathbb{R}$ sind überabzählbar.

Hinweis: Für Teil (a) nehmen Sie an, dass $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \{ 0, 1 \}$ *mit* $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \neq (b_k)_{k\in\mathbb{N}}$. *Um zu zeigen, dass* $f((a_k)_{k\in\mathbb{N}}) \neq f((b_k)_{k\in\mathbb{N}})$ *ist, betrachten Sie* $k_0 := \min\{ k \in \mathbb{N} : a_k \neq b_k \} \in \mathbb{N}$ *und beachten Sie, dass* $\sum_{k=k_0+1}^{\infty} 2 \cdot 3^{-k} = 3^{-k_0}$ *ist. Für Teil (b) beachten Sie, dass die Menge* $\prod_{k=1}^{\infty} A_k$ *wie in Aufgabe 5.4 gezeigt überabzählbar ist.*

Bemerkung: In Aufgabe 5.4 wurde gezeigt, dass es eine bijektive Abbildung $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \prod_{k=1}^{\infty} A_k$ *gibt. Per Konstruktion ist also die Abbildung* $f \circ g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow [0, 1]$ *injektiv.*

Bemerkung: Für $a \in \mathbb{C}$ ist die geometrische Reihe $\sum_k a^k$ genau dann konvergent, wenn $|a| < 1$. In diesem Fall gilt $\sum_{k=0}^{\infty} a^k = \frac{1}{1-a}$; vgl. Bsp. 2.4.8. Diese Tatsachen können Sie (ohne Beweis) in den Aufgaben 2, 3 und 4 verwenden.

Wir wünschen allen frohe Feiertage und

und einen guten Start ins neue Jahr!