Analysis I
Wintersemester 2025/2026
Übungsblatt 11

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Ausgabe:	Fr., 09.01.2026, 14:00 Uhr
Abgabe:	Mo., 19.01.2026, 18:00 Uhr
Besprechung:	Di., 20.01.2026 bzw. Mi., 21.01.2026

Ⓑ **Aufgabe 11.1:** (Reihen und Konvergenz, $1+1+1+1+1+1$ Punkte)
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

(a) $\sum_k (\sqrt[k]{a} - 1)^k$, wobei $a > 0$,

(b) $\sum_k \dfrac{k+4}{k^2 - 3k + 7}$,

(c) $\sum_k \dfrac{(-1)^k k^3}{(k^2+1)^{4/3}}$,

(d) $\sum_k (-1)^k \big(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\big)$,

(e) $\sum_k \dfrac{k!}{k^k}$,

(f) $\sum_k \dfrac{k^4}{3^k}$.

Aufgabe 11.2: (Wurzel- und Quotientenkriterium)
Sei $(z_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ gegeben als

$$z_k := \begin{cases} 2^{-k}, & \text{falls } k \text{ ungerade ist,} \\ 3^{-k}, & \text{falls } k \text{ gerade ist,} \end{cases} \qquad k \in \mathbb{N}.$$

Bestimmen Sie

$$\liminf_{k\to\infty} \left|\frac{z_{k+1}}{z_k}\right|, \qquad \limsup_{k\to\infty} \left|\frac{z_{k+1}}{z_k}\right| \qquad \text{und} \qquad \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|z_k|}.$$

Zeigen Sie, dass mit Hilfe des Quotientenkriteriums (Korollar 2.4.19 (a)) nicht entschieden werden kann, ob die Reihe $\sum_k z_k$ konvergiert oder divergiert. Entscheiden Sie mit Hilfe des Wurzelkriteriums (Korollar 2.4.19 (b)), ob die Reihe $\sum_k z_k$ konvergiert oder divergiert.

Ⓑ **Aufgabe 11.3:** (Cauchy-Produkt, 2 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_k \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{k}}$ bedingt konvergent ist. Bestimmen Sie das Cauchy-Produkt dieser Reihe mit sich selbst und zeigen Sie, dass dieses divergiert.

Hinweis: Für $(z_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$, $(w_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{C}$ ist das Cauchy-Produkt der Reihen $\sum_k z_k$ und $\sum_k w_k$ gemäß Proposition 2.4.26 gegeben als die Reihe $\sum_n \sum_{k=0}^n z_{n-k} w_k$.

Ⓑ **Aufgabe 11.4:** (Potenzreihen, $1+1+1+1$ Punkte)
Bestimmen Sie jeweils den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen:

(a) $\sum_k \dfrac{1}{k^k} z^k$,

(b) $\sum_k \dfrac{1}{\sqrt{k!}} z^k$,

(c) $\sum_k (-1)^k \dfrac{k!}{k^k} z^k$,

(d) $\sum_k \dfrac{k 2^k}{(1+k^2)^2} z^k$.

Hinweis: Für Teil (c) wenden Sie das Quotientenkriterium direkt auf die gegebene Reihe an, um zu entscheiden, für welche $z \in \mathbb{C}^\bullet$ diese konvergiert.