Analysis I
Wintersemester 2025/2026

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Übungsblatt 12

Ausgabe:	Fr., 16.01.2026, 14:00 Uhr
Abgabe:	Mo., 26.01.2026, 18:00 Uhr
Besprechung:	Di., 27.01.2026 bzw. Mi., 28.01.2026

Ⓑ **Aufgabe 12.1:** (Exponentialfunktion, $1 + 1$ Punkte)
Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ sei gegeben wie in Definition 2.6.1. Zeigen Sie:

(a) Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist $|\exp(z)| = \exp(\operatorname{Re} z)$.

(b) Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist $|\exp(it)| = 1$.

Hinweis: Für $w \in \mathbb{C}$ ist $|w|^2 = w\bar{w}$. Sie können Proposition 2.6.3 (a) – (f) verwenden.

Ⓑ **Aufgabe 12.2:** (Stetigkeit, 2 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \{ 0, 1 \}$ gegeben als $f(x) := 1$, falls $x \in \mathbb{Q}$, und $f(x) := 0$, falls $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass f an jeder Stelle $x \in \mathbb{R}$ unstetig ist.

Hinweis: Verwenden Sie Proposition 1.3.53 und das Axiom von der abzählbaren Auswahl.

Ⓑ **Aufgabe 12.3:** (Funktionenfolgen, $3 + 3 + 2$ Punkte)
Untersuchen Sie die Funktionenfolge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ jeweils auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz für

(a) $f_k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f_k(x) = \frac{x^2}{1+(kx)^2}$ für $k \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$;

(b) $f_k : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f_k(x) = \frac{k^2 x}{1+(kx)^2}$ für $k \in \mathbb{N}$ und $x \in [0, 1]$;

(c) $f_k : [\frac{1}{2}, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f_k(x) = \frac{k^2 x}{1+(kx)^2}$ für $k \in \mathbb{N}$ und $x \in [\frac{1}{2}, 1]$.

Ⓑ **Aufgabe 12.4:** (Stetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit, $1 + 1$ Punkte)
Betrachten Sie die Funktion $f : (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben als $f(x) = \frac{x}{1+x}$ für $x \in (-1, 1)$. Zeigen Sie, dass f stetig aber nicht gleichmäßig stetig ist.

Aufgabe 12.5: (Stetigkeit)
Zeigen Sie (mit Hilfe der Definition über Folgen), dass die Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cup \{ 0 \}, \\ \frac{1}{q}, & \text{falls } x = \frac{p}{q} \text{ mit teilerfremden } p \in \mathbb{Z} \setminus \{ 0 \},\ q \in \mathbb{N}, \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R},$$

in jedem Punkt $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ stetig ist.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst: Ist $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} = (\frac{p_k}{q_k})_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q} \cup \{ 0 \}$ konvergent gegen $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, wobei $p_k \in \mathbb{Z} \setminus \{ 0 \}$ und $q_k \in \mathbb{N}$ teilerfremd sind für alle $k \in \mathbb{N}$, dann gilt $\liminf_{k\to\infty} q_k = \infty$.