Analysis I
Wintersemester 2025/2026
Übungsblatt 13

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Ausgabe:	Fr., 23.01.2026, 14:00 Uhr
Abgabe:	Mo., 02.02.2026, 18:00 Uhr
Besprechung:	Di., 03.02.2026 bzw. Mi., 04.02.2026

Aufgabe 13.1: (Stetige Fortsetzung)
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{C}$ gleichmäßig stetig. Zeigen Sie, dass die Grenzwerte $\lim_{x \to a} f(x)$ und $\lim_{x \to b} f(x)$ existieren.

Hinweis: Es genügt, die Existenz des Grenzwertes für $x \to a$ zu zeigen. Zeigen Sie dazu zunächst, dass für jede Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq (a, b)$ mit $x_k \to a$ die Folge $(f(x_k))_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C}$ eine Cauchyfolge ist.

Aufgabe 13.2: (Fixpunktsatz für stetige Funktionen)
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$ und sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f([a, b]) \subseteq [a, b]$. Zeigen Sie, dass ein Fixpunkt $x^* \in [a, b]$ für f existiert, d. h. $f(x^*) = x^*$.

Ⓑ **Aufgabe 13.3:** (Differenzierbarkeit und Ableitungen, $2 + 2$ Punkte)
Seien $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegen als

$$f(x) := \frac{e^{-x}}{\sqrt{1 + x^2}}, \qquad g(x) := \cos\big(\sin(x^2)\big), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass f und g differenzierbar sind, und bestimmen Sie die Ableitungen $f', g' : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

Ⓑ **Aufgabe 13.4:** (Differenzierbarkeit und Ableitungen, 2 Punkte)
Zeigen Sie, dass die Funktion $f : (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$ mit $f(x) := x^x$ für $x > 0$ stetig differenzierbar ist, und bestimmen Sie die Ableitung $f' : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$.

Aufgabe 13.5: (Differenzierbarkeit)
Zeigen Sie, dass die Funktion $\sqrt{\cdot} : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ nicht differenzierbar ist an der Stelle $x = 0$.

Ⓑ **Aufgabe 13.6:** (Grenzwerte, $1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ Punkte)
Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{1 + \cos(\pi x)}{x^2 - 2x + 1}$ (b) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{e^x - x e^{x/2} - 1}{x^2}$ (c) $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\log(\cos(3x))}{\log(\cos(2x))}$

(d) $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{\log(1 + e^x)}{\sqrt{1 + x^2}}$ (e) $\displaystyle \lim_{x \to \infty} x\Big(\log\big(1 + \sqrt{1 + x^2}\big) - \log(x)\Big)$ (f) $\displaystyle \lim_{x \to \infty} \frac{\sin(x) + 2x}{\cos(x) - 2x}$

Hinweis: Sie können in den Aufgaben 13.3–13.6 alle im Index des Vorlesungsskriptes aufgeführten Grenzwerte, Ableitungen und Ableitungsregeln ohne Beweis verwenden.