Analysis II
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne
Daniel Curkovic
Bertold Nöckel
Jascha Wolter

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Sommersemester 2026

Präsenzblatt 2

Präsenzaufgabe 2.1

In dieser Aufgabe widmen wir uns der Bemerkung 5.1.9. Betrachten Sie dazu folgende zwei Partitionen $(P,T),(P',T')\in\Pi^*([0,1])$ gegeben durch

$$P=(x_0,\dots,x_4)=\Big(0,\frac{1}{6},\frac{2}{6},\frac{4}{6},1\Big),\qquad P'=(z_0,\dots,z_3)=\Big(0,\frac{1}{5},\frac{1}{3},1\Big).$$

Berechnen Sie die gemeinsame Verfeinerung von P und P', also sowohl $Q=(y_0,\dots,y_m)\in\Pi([0,1])$ als auch k_j und k'_j aus 5.1.9.

Präsenzaufgabe 2.2

Für $n\in\mathbb{N}$ sei $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ definiert durch

$$[0,1]\ni x\mapsto f_n(x):=\begin{cases} n & ,\ 0<x\le\frac{1}{n},\\ 0 & ,\ \frac{1}{n}<x\le 1 \text{ oder } x=0.\end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen eine Funktion $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ konvergiert.

(b) Zeigen Sie, dass die Grenzfunktion f Riemannintegrierbar ist mit

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x\ne\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(c) Konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch gleichmäßig gegen f?

Präsenzaufgabe 2.3

Sei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Zeigen Sie, dass für alle $x\ge 0$ folgende Gleichheit gilt:

$$\int_0^x\Big(\int_0^y f(z)\,\mathrm{d}z\Big)\,\mathrm{d}y=\int_0^x (x-y)\cdot f(y)\,\mathrm{d}y$$

Präsenzaufgabe 2.4

Seien $n\in\mathbb{N}$ und $(P,T),(P',T')\in\Pi^*([0,1])$ mit

$$P=\big(x_0,\dots,x_n,x_{n+1}\big)=\Big(0,\frac{1}{2n},\frac{3}{2n},\dots,\frac{2j-1}{2n},\dots,\frac{2n-1}{2n},1\Big)$$
$$P'=\big(z_0,\dots,z_n\big)=\Big(0,\frac{1}{n},\dots,\frac{j}{n},\dots,\frac{n-1}{n},1\Big).$$

Berechnen Sie die gemeinsame Verfeinerung von P und P', also sowohl $Q=(y_0,\dots,y_m)\in\Pi([0,1])$ als auch k_j und k'_j aus 5.1.9. Eine Skizze kann hier sehr hilfreich sein.

Die Aufgaben werden in den Präsenzübungsgruppen am Mittwoch, den 22. April 2026 und Donnerstag, den 23. April 2026 bearbeitet.