Analysis II
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne
Daniel Curkovic
Bertold Nöckel
Jascha Wolter

Sommersemester 2026

Präsenzblatt 5

Präsenzaufgabe 5.1

Betrachten Sie die folgenden beiden Metriken d_1 und d_2 auf $\mathbb{R}$ definiert durch

$$d_1(x,y) = \begin{cases} 0 & , \ x = y \\ 1 & , \ x \neq y, \end{cases}$$
$$d_2(x,y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|.$$

(a) Untersuchen Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} := \big(1/n\big)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ auf Konvergenz bzgl. der Metriken d_1 und d_2.

(b) Wird die Metrik d_1 von einer Norm induziert?

Präsenzaufgabe 5.2

Sei d eine Metrik auf dem $\mathbb{F}$- Vektorraum X, welche die folgenden beiden zusätzlichen Eigenschaften habe:

(a) $d(x+a, y+a) = d(x,y)$ für alle $a, x, y \in X$ (**Translationsinvarianz**).

(b) $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \, d(x,y)$ für alle $x, y \in X$ und $\lambda \in \mathbb{F}$ (**Strahlensatz**).

Zeigen Sie, dass dann durch $\|x\| := d(x, \mathbf{0})$ eine Norm auf X gegeben ist und dass d die von $\|\cdot\|$ induzierte Metrik ist.

Präsenzaufgabe 5.3

Sei $C\big([0,1]\big)$ der Vektorraum aller auf $[0,1]$ stetigen Funktionen. Nach Bemerkung 1.2.3 bzw. Aufgabe 5.4 lassen sich auf $C\big([0,1]\big)$ folgende Normen definieren:

$$\|f\|_{C([0,1])} := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = \max_{x\in[0,1]} |f(x)|$$
$$\|f\|_1 := \int_0^1 |f(x)| \, \mathrm{d}x.$$

Betrachten Sie nun die Folge von Funktionen $C\big([0,1]\big) \ni f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$[0,1] \ni x \mapsto f_n(x) := x^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Entscheiden Sie, ob $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent bzgl. $\|\cdot\|_{C([0,1])}$ oder $\|\cdot\|_1$ ist.

Die Aufgaben werden in der Präsenzübungsgruppe am Mittwoch, den 13. Mai 2026 bearbeitet. Wir werden für dieses Blatt auch eine Musterlösung hochladen.