

Präsenzblatt 6

Präsenzaufgabe 6.1

Bestimmen Sie die folgenden Mengen

$$A := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \left(-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right), \quad B := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} [0, 1 - 2^{-k}]$$

und zeigen Sie, dass (aufgefasst als Teilmengen von \mathbb{R} ausgestattet mit der euklidischen Metrik)

- (a) A nicht offen und
- (b) B nicht abgeschlossen ist.

Präsenzaufgabe 6.2

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f(x) < g(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Zeigen Sie:

- (a) $M := \{(x, y) \in (a, b) \times \mathbb{R} : f(x) < y < g(x)\}$ ist offen,
- (b) $N := \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} : f(x) \leq y \leq g(x)\}$ ist abgeschlossen.

Hinweis: Nutzen Sie für beide Aufgabenteile die trivialen stetigen Fortsetzungen $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\tilde{g} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ von f und g , welche definiert sind durch

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(a) & , x < a \\ f(x) & , x \in [a, b], \\ f(b) & , x > b \end{cases}, \quad \tilde{g}(x) := \begin{cases} g(a) & , x < a \\ g(x) & , x \in [a, b] \\ g(b) & , x > b \end{cases}$$

Präsenzaufgabe 6.3

Bestimmen Sie das Innere, den Abschluss, sowie den Rand folgender Teilmengen von $M \subseteq \mathbb{R}$ (versehen mit der euklidischen Metrik):

- (a) $M := [0, 1] \cap \mathbb{Q}$.
- (b) $M := \{0\} \cup [1, 2) \cup (2, 3)$.

Die Aufgaben werden in den Präsenzübungsgruppen am Mittwoch, den 20. Mai 2026 und Donnerstag, den 21. Mai 2026 bearbeitet.