

Präsenzblatt 8

Präsenzaufgabe 8.1

Überprüfen Sie, welche der folgenden Abbildungen $f : X \rightarrow X$ strikte Kontraktionen sind. Bestimmen Sie ggf. den Fixpunkt.

- (a) $X := \mathbb{R}$, $\mu(x, y) := |x - y|$ und $f(x) := \frac{1}{2} \arctan(x)$.
- (b) $X := (0, 1)$, $\mu(x, y) := |x - y|$ und $f(x) := x/3$.
- (c) $X := \mathbb{C}$, $\mu(x, y) := |x - y|$ und $f(z) := \alpha \cdot z + \beta$ mit $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. (die Antworten hängen von α, β ab.)

Präsenzaufgabe 8.2

Sei $\alpha > 1$. Zeigen Sie, dass die Gleichung

$$x^\alpha - x = 1$$

genau eine Lösung in $[0, \infty)$ besitzt.

Präsenzaufgabe 8.3

Zeigen Sie, dass das nichtlineare Gleichungssystem

$$x = \exp\left(\frac{1}{2} \cdot (\sin(y) - 1)\right), \quad y = \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{2}$$

eine eindeutige Lösung $(x^*, y^*) \in \mathbb{R}^2$ besitzt.

Hinweis: Betrachten Sie dafür die Abbildung $F : (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1) \rightarrow (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ definiert durch

$$(x, y) \mapsto F(x, y) := \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{1}{2} \cdot (\sin(y) - 1)\right) \\ \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{2} \end{pmatrix}.$$

Bei der benötigten Ungleichung kann der Mittelwertsatz aus der Analysis I hilfreich sein.

Die Aufgaben werden in der Präsenzübungsgruppe am Mittwoch, den 3. Juni 2026 bearbeitet. Wir werden für dieses Blatt auch eine Musterlösung hochladen.