

# Analysis II

## Sommersemester 2026

### Übungsblatt 1

Mathematisches Institut  
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf  
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Ausgabe: Di., 14.04.2026, 14:00 Uhr  
Abgabe: Di., 21.04.2026, 18:00 Uhr  
Besprechung: Mi., 22.04.2026 bzw. Do., 23.04.2026

ⓑ **Aufgabe 1.1:** (Taylorentwicklung, 4 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , die gegeben ist als

$$f(x) := \begin{cases} e^{-1/x}, & \text{falls } x > 0, \\ 0, & \text{falls } x \leq 0, \end{cases} \quad x \in \mathbb{R},$$

und zeigen Sie, dass  $f$  beliebig oft differenzierbar ist mit  $f^{(k)}(x) = p_k(\frac{1}{x})e^{-1/x}$  für alle  $x > 0$  und  $f^{(k)}(x) = 0$  für alle  $x \leq 0$  und alle  $k \in \mathbb{N}_0$ , wobei  $p_k$  ein Polynom vom Grad  $2k$  ist. Zeigen Sie weiter, dass die Taylorreihe

$$\sum_k \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad |x| < r,$$

für jedes  $r > 0$  gleichmäßig in  $(-r, r)$  gegen eine Funktion  $g : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert, wobei aber  $f(x) \neq g(x)$  für alle  $0 < x < r$  gilt.

**Aufgabe 1.2:** (Taylorentwicklung)

Betrachten Sie die Funktion  $f : (-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , die gegeben ist als  $f(x) = \log(1+x)$  für  $x \in (-1, 1]$ , und zeigen Sie, dass  $f$  beliebig oft differenzierbar ist in  $(-1, 1]$ , und bestimmen Sie  $f^{(k)}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Bestimmen Sie die Taylorreihe von  $f$  um 0 und zeigen Sie, dass diese in  $[0, 1]$  gegen  $f$  konvergiert.

*Hinweis:* Zeigen Sie (bspw. per Induktion nach  $k \in \mathbb{N}$ ), dass  $f^{(k)}(x) = (-1)^{k+1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}$  für  $x \in (-1, 1]$  und  $k \in \mathbb{N}$  gilt. Verwenden Sie die Lagrange'sche Variante der Taylorformel, Korollar 4.3.8 (a), um die Konvergenz der Taylorreihe nachzuweisen.

*Bemerkung:* Die Taylorreihe von  $f$  um 0 konvergiert sogar gleichmäßig in  $[0, 1]$  gegen  $f$ .

ⓑ **Aufgabe 1.3:** (Riemannintegral, 4 Punkte)

Sei  $a > 0$  und  $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{C}$  ungerade und Riemannintegrierbar. Zeigen Sie, dass  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$ .

*Hinweis:* Zeigen Sie, dass für eine geeignete Folge  $(P_k, T_k) \subseteq \Pi^*([-a, a])$  mit  $\mu(P_k) \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$  gilt, dass  $\Sigma_{P_k, T_k} f \rightarrow 0$  für  $k \rightarrow \infty$ .

ⓑ **Aufgabe 1.4:** (Riemannintegral, 4 Punkte)

Sei  $a > 1$  und sei  $f : [1, a] \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben als  $f(x) := \frac{1}{x}$  für  $x \in [1, a]$ . Für  $k \in \mathbb{N}$  sei die Zerlegung  $P_k \in \Pi([1, a])$  gegeben als  $P_k := (1, a^{1/k}, a^{2/k}, \dots, a^{(k-1)/k}, a)$ . Bestimmen Sie  $\Sigma_{P_k, \tilde{P}_k} f$  und  $\Sigma_{P_k, \hat{P}_k} f$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  und zeigen Sie, dass  $\Sigma_{P_k, \tilde{P}_k} f, \Sigma_{P_k, \hat{P}_k} f \rightarrow \log(a)$  für  $k \rightarrow \infty$ .

*Hinweis:* Für  $P = (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \Pi([1, y])$  ist  $\tilde{P} := (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$  und  $\hat{P} := (x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Zeigen Sie zur Bestimmung der Grenzwerte zunächst, dass  $\lim_{x \rightarrow \infty} x(a^{1/x} - 1) = \lim_{x \rightarrow \infty} x(1 - a^{-1/x}) = \log(a)$ .