

# Analysis II

## Sommersemester 2026

### Übungsblatt 2

Mathematisches Institut  
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf  
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Ausgabe: Di., 21.04.2026, 14:00 Uhr  
Abgabe: Di., 28.04.2026, 18:00 Uhr  
Besprechung: Mi., 29.04.2026 bzw. Do., 30.04.2026

#### Aufgabe 2.1: (Funktionen von beschränkter Variation)

Seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ , sei  $J := [a, b] \subseteq \mathbb{R}$  und sei  $f : J \rightarrow \mathbb{R}$ . Für  $P \in \Pi(J)$  mit  $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ , wobei  $n \in \mathbb{N}$ , heißt der Wert

$$\Delta_{J,P}f := \sum_{k=1}^n |f(x_k) - f(x_{k-1})|$$

die *Variation von  $f$  auf  $J$  bzgl.  $P$* . Weiterhin heißt der Wert

$$\Delta_J f := \sup_{P \in \Pi(J)} \Delta_{J,P}f \in [0, \infty) \cup \{\infty\}$$

die *totale Variation von  $f$  auf  $J$* . Schließlich sagt man,  $f$  sei von *beschränkter Variation (auf  $J$ )*, falls  $\Delta_J f < \infty$ . Zeigen Sie:

- (a) Ist  $f$  monoton, dann ist  $f$  von beschränkter Variation.
- (b) Sei  $f$  von beschränkter Variation und die Funktionen  $\phi, \psi : J \rightarrow \mathbb{R}$  seien gegeben als  $\phi(a) := f(a)$  und  $\phi(x) := f(x) + \Delta_{[a,x]}f$  für  $x \in (a, b]$  bzw.  $\psi(a) := 0$  und  $\psi(x) := \Delta_{[a,x]}f$  für  $x \in (a, b]$ . Zeigen Sie, dass  $\phi$  und  $\psi$  monoton wachsend sind mit  $f = \phi - \psi$ .
- (c) Ist  $f$  von beschränkter Variation, dann ist  $f$  Riemannintegrierbar.

*Hinweis: Für Teil (c) verwenden Sie Teil (b), Theorem 5.1.7 (d) und Proposition 5.1.10 (a). Die Darstellung  $f = \phi - \psi$  in Teil (b) heißt Jordanzersetzung von  $f$ .*

#### ⓑ Aufgabe 2.2: (Konvergenz von Riemann-Integralen, 4 Punkte)

Sei  $f_n : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben als

$$f_n(x) := \begin{cases} \frac{n}{2} \sin(nx), & \text{falls } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{n}, \\ 0, & \text{falls } \frac{\pi}{n} < x \leq \pi, \end{cases} \quad x \in [0, \pi],$$

für  $n \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie, dass  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  punktweise in  $[0, \pi]$  gegen eine Funktion  $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  konvergiert. Zeigen Sie, dass  $f_n$  Riemann-integrierbar ist für jedes  $n \in \mathbb{N}$ , und, dass  $f$  Riemann-integrierbar ist, wobei  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi f_n(x) dx \neq \int_0^\pi f(x) dx$ . Konvergiert  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gleichmäßig gegen  $f$ ?

#### ⓑ Aufgabe 2.3: (Integralsinus, 4 Punkte)

Die Funktion  $\text{Si} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\text{Si}(x) := \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

heißt *Integralsinus*. Zeigen Sie, dass der Integralsinus wohldefiniert ist, und, dass sämtliche lokale Extremalstellen von  $\text{Si}$  an den Stellen  $k\pi$  mit  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  vorliegen. Für welche  $k \in \mathbb{N}$  handelt es sich bei  $k\pi$  um eine lokale Minimal- bzw. Maximalstelle?

*Hinweis: Für  $x < 0$  und eine Riemannintegrierbare Funktion  $f : [x, 0] \rightarrow \mathbb{C}$  setzt man  $\int_0^x f(t) dt := -\int_x^0 f(t) dt$ .*

#### ⓑ Aufgabe 2.4: (Riemannintegral, 4 Punkte)

Geben Sie einen vollständigen Beweis von Proposition 5.1.12 an.