

Analysis II

Sommersemester 2026

Übungsblatt 4

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Ausgabe: Di., 05.05.2026, 14:00 Uhr
Abgabe: Di., 12.05.2026, 18:00 Uhr
Besprechung: Mi., 13.05.2026

Ⓑ **Aufgabe 4.1:** (Cauchy Kriterium, 4 Punkte)

Seien $a \in \mathbb{R}$ und $\beta \in (a, \infty) \cup \{\infty\}$ und sei $f : [a, \beta) \rightarrow \mathbb{C}$ Riemann-integrierbar auf $[a, b]$ für alle $b \in (a, \beta)$. Zeigen Sie, dass f genau dann uneigentlich Riemann-integrierbar ist auf $[a, \beta)$, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\gamma \in (a, \beta)$ existiert, so dass

$$\left| \int_x^y f(t) dt \right| < \varepsilon, \quad \gamma < x < y < \beta.$$

Zeigen Sie weiterhin, dass die Funktion $x \mapsto \sin(x^2) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ uneigentlich Riemann-integrierbar ist.

Ⓑ **Aufgabe 4.2:** (Uneigentliches Riemann-Integral und Reihen, 4 Punkte)

Sei $f : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ monoton fallend. Zeigen Sie, dass f genau dann uneigentlich Riemann-integrierbar ist auf $[1, \infty)$, wenn $\sum_{k=1}^{\infty} f(k) < \infty$. Bestimmen Sie weiterhin alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die die Reihe $\sum_k k^{-\alpha}$ konvergiert.

Hinweis: Sie können die Aussage von EX 5.16 (a) verwenden; vgl. Präsenzaufgabe 3.2 (a).

Ⓑ **Aufgabe 4.3:** (Metriken, 4 Punkte)

Sei $\mu : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ gegeben als $\mu(x, y) := \sqrt{|x - y|}$ für $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass μ eine Metrik auf \mathbb{R} ist.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $\sqrt{1+t} \leq 1 + \sqrt{t}$ für alle $t \geq 0$.

Aufgabe 4.4: (Young'sche Ungleichung)

Seien $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Zeigen Sie, dass

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q, \quad a, b \geq 0.$$

Hinweis: Sie können o. E. annehmen, dass $a, b > 0$. Zeigen Sie dann, dass die Funktion $\phi : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\phi(t) := \frac{1}{p} + \frac{1}{q}t^q - t$ ein globales Minimum bei $t = 1$ hat, und betrachten Sie dann $t = a^{-p/q}b$.