Analysis II
Sommersemester 2026
Übungsblatt 5

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Ausgabe:	Di., 12.05.2026, 14:00 Uhr
Abgabe:	Di., 19.05.2026, 18:00 Uhr
Besprechung:	Mi., 20.05.2026 bzw. Do., 21.05.2026

Aufgabe 5.1: (Hölder'sche Ungleichung)
Seien $n \in \mathbb{N}$ und $1 \leq p,\, q \leq \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Zeigen Sie die *Hölder'sche Ungleichung:*

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \|x\|_p \, \|y\|_q, \qquad x,\, y \in \mathbb{R}^n.$$

Hinweis: In der Bedingung $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$ ist „$\frac{1}{\infty} = 0$“ zu setzen. Für $(p,\, q) \in \{\, (1,\, \infty),\ (\infty,\, 1)\,\}$ kann die Hölder'sche Ungleichung direkt verifiziert werden. Für $1 < p,\, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ist die Young'sche Ungleichung hilfreich, die Sie ohne Beweis verwenden können: Für alle $a,\, b \geq 0$ gilt $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$ (vgl. Aufgabe 4.4). Sie können in allen Fällen o. E. $\|x\|_p > 0$ und $\|y\|_q > 0$ annehmen (vgl. Aufgabe 5.2 (i)).

Ⓑ **Aufgabe 5.2:** (Normen auf $\mathbb{R}^n$, $1+1+2$ Punkte)
Für $1 \leq p \leq \infty$ ist $\|\cdot\|_p : \mathbb{R}^n \longrightarrow [0,\, \infty)$ gegeben als

$$\|x\|_p := \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}, \qquad 1 \leq p < \infty, \qquad \|x\|_\infty := \max_{k=1,\ldots,n} |x_k|, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Zeigen Sie, dass so für jedes $1 \leq p \leq \infty$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ gegeben ist, d. h. dass gilt:

(i) Für $x \in \mathbb{R}^n$ ist $\|x\|_p = 0$ genau für $x = 0$.

(ii) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und alle $x \in \mathbb{R}^n$ ist $\|\alpha x\|_p = |\alpha|\, \|x\|_p$.

(iii) Für alle $x,\, y \in \mathbb{R}^n$ ist $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$.

Hinweis: Bei (iii) sollten zunächst die Fälle $p \in \{\, 1,\, \infty\,\}$ betrachtet werden. Für die übrigen Fälle ist die Hölder'sche Ungleichung hilfreich.

Aufgabe 5.3: (Konvergenz in $\mathbb{R}^n$)
Seien $n \in \mathbb{N}$ und $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^n$ sowie $x \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass genau dann $x_k \to x$ bzgl. der euklidischen Norm $|\cdot| = \|\cdot\|_2$ für $k \to \infty$ gilt, wenn gilt, dass $x_k^{(\ell)} \to x^{(\ell)}$ in $\mathbb{R}$ für $k \to \infty$ für $\ell = 1,\, \ldots,\, n$. Hierbei sei $x_k = (x_k^{(1)},\, x_k^{(2)},\, \ldots,\, x_k^{(n)})^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^n$ für $k \in \mathbb{N}$ sowie $x = (x^{(1)},\, x^{(2)},\, \ldots,\, x^{(n)})^\mathsf{T} \in \mathbb{R}^n$.

Ⓑ **Aufgabe 5.4:** (Innenprodukte und Normen, $2+3+3$ Punkte)
Seien $a,\, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $J := [a,\, b] \subseteq \mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie, dass $C(J) = C_b(J)$.

(b) Zeigen Sie, dass durch $\|\cdot\|_1 : C(J) \longrightarrow [0,\, \infty)$ mit

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)|\, \mathrm{d}x, \qquad f \in C(J),$$

eine Norm auf $C(J)$ gegeben ist.

(c) Zeigen Sie, dass durch $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_2 : C(J) \times C(J) \longrightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\langle f,\, g\rangle_2 := \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\, \mathrm{d}x, \qquad f,\, g \in C(J),$$

ein Innenprodukt auf $C(J)$ gegeben ist. Bestimmen Sie die von $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_2$ induzierte Norm $\|\cdot\|_2$ auf $C(J)$.

Bemerkung: Nach Teil (a) ist durch $\|\cdot\|_\infty := \|\cdot\|_{C_b(J)}$ eine Norm auf $C(J)$ gegeben, die sog. Maximumnorm *auf $C(J)$. Wir verwenden hier die Symbole $\|\cdot\|_p$ mit $p \in \{\, 1,\, 2,\, \infty\,\}$ für Normen auf $C(J)$, die natürlich nicht übereinstimmen mit den Normen auf $\mathbb{R}^n$, die in Beispiel 1.2.2 betrachtet wurden und für die die gleichen Symbole verwendet werden.*