Analysis II
Sommersemester 2026
Übungsblatt 6

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Ausgabe:	Di., 19.05.2026, 14:00 Uhr
Abgabe:	Di., 26.05.2026, 18:00 Uhr
Besprechung:	Mi., 27.05.2026 bzw. Do., 28.05.2026

Ⓑ **Aufgabe 6.1:** (Inneres, Abschluss und Rand, $1 + 1 + 1$ Punkte)
Seien (X, μ) ein metrischer Raum und $A, B \subseteq X$ mit $A \subseteq B$.

(a) Zeigen Sie, dass $A^\circ \subseteq B^\circ$.

(b) Zeigen Sie, dass $\bar{A} \subseteq \bar{B}$.

(c) Geben Sie ein Beispiel an (für (X, μ) und $A, B \subseteq X$ mit $A \subseteq B$), so dass $\partial A \not\subseteq \partial B$.

Ⓑ **Aufgabe 6.2:** (Inneres, Abschluss und Rand, 6 Punkte)
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig mit $f(x) < g(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Bestimmen Sie für

$$A := \Big\{ (x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} \,:\, f(x) < y < g(x) \Big\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

das Innere A°, den Abschluss $\bar{A}$ und den Rand ∂A.

Bemerkung: Wie üblich soll $\mathbb{R}^2$ mit der euklidischen Metrik ausgestattet sein.

Hinweis: Es ist hilfreich, zunächst zu zeigen, dass die Menge $\{ (x, y) \in (a, b) \times \mathbb{R} \,:\, f(x) < y < g(x) \}$ offen ist und die Menge $\{ (x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} \,:\, f(x) \le y \le g(x) \}$ abgeschlossen.

Aufgabe 6.3: (Inneres, Abschluss und Rand)
Bestimmen Sie für

$$A := \Big\{ (x, \sin(\tfrac{1}{x})) \,:\, 0 < x \le \tfrac{1}{2\pi} \Big\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

das Innere A°, den Abschluss $\bar{A}$ und den Rand ∂A.

Aufgabe 6.4: (Häufungspunkte)
Seien (X, μ) ein metrischer Raum und $A \subseteq X$. Zeigen Sie: Ein Punkt $x \in X$ ist genau dann ein Häufungspunkt von A, wenn eine Folge $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq A \setminus \{ x \}$ existiert mit $x_k \to x$ für $k \to \infty$.

Ⓑ **Aufgabe 6.5:** (Kugeln in normierten Räumen, 3 Punkte)
Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, sei $x \in X$ und sei $\varepsilon > 0$. Zeigen Sie, dass dann $\overline{B_\varepsilon(x)} = \bar{B}_\varepsilon(x)$ sowie $\partial B_\varepsilon(x) = \{ y \in X \,:\, \|x - y\| = \varepsilon \}$ gelten.