Analysis II
Sommersemester 2026
Übungsblatt 7

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Ausgabe:	Di., 26.05.2026, 14:00 Uhr
Abgabe:	Di., 02.06.2026, 18:00 Uhr
Besprechung:	Mi., 03.06.2026

Ⓑ **Aufgabe 7.1:** (Stetigkeit, $3+3+3$ Punkte)
Untersuchen Sie die folgenden Mengen auf Offenheit, Abgeschlossenheit, Beschränktheit und Kompaktheit:

(a) $\{\, (x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; y < 1 + \sqrt{|x|} \,\}$

(b) $\{\, (x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; -1 \leq x \leq 1,\; y = x^2 + 1 \,\}$

(c) $\{\, (x,\, y,\, z) \in \mathbb{R}^3 \;:\; x > y > z > 0 \,\}$

Aufgabe 7.2: (Beschränkte/totalbeschränkte Mengen)
Sei $\|\cdot\|_\infty : C([0,\, 1]) \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert wie in Aufgabe 5.4. Im Folgenden soll gezeigt werden, dass die Menge $A := \{\, f \in C([0,\, 1]) \;:\; \|f\|_\infty \leq 1 \,\}$ (beschränkt aber) nicht totalbeschränkt ist (bzgl. $\|\cdot\|_\infty$). Seien dazu $n \in \mathbb{N}$ und $f_1,\, \ldots,\, f_n \in C([0,\, 1])$.

(a) Seien $0 \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leq 1$. Zeigen Sie, dass für jedes $k \in \{\, 1,\, \ldots,\, n \,\}$ ein $y_k \in \{\, \pm 1 \,\}$ existiert mit $|f_k(x_k) - y_k| > \frac{2}{3}$.

(b) Zeigen Sie, dass ein $f \in C([0,\, 1])$ existiert mit $f(x_k) = y_k$ für $k = 1,\, \ldots,\, n$.

(c) Zeigen Sie, dass $A \not\subseteq \bigcup_{k=1}^{n} B_{1/2}(f_k)$.

Bemerkung: Die Menge A kann also nicht mit endlich vielen offenen Kugeln mit Radius $\frac{1}{2}$ überdeckt werden, ist also nicht totalbeschränkt. Wegen $\mathrm{diam}(A) \leq 2$ ist A aber beschränkt.

Ⓑ **Aufgabe 7.3:** (Normen und Konvergenz in $C([0,\, 1])$, $1+1+1$ Punkte)
Seien $\|\cdot\|_1,\; \|\cdot\|_\infty : C([0,\, 1]) \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert wie in Aufgabe 5.4.

(a) Zeigen Sie, dass es eine Konstante $C > 0$ gibt, so dass $\|f\|_1 \leq C\|f\|_\infty$ für alle $f \in C([0,\, 1])$.

(b) Betrachten Sie die Funktionenfolge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq C([0,\, 1])$, die gegeben ist als

$$f_k(x) := x^k, \qquad 0 \leq x \leq 1, \qquad\qquad k \in \mathbb{N},$$

und zeigen Sie, dass $\|f_k\|_1 \to 0$ für $k \to \infty$.

(c) Zeigen Sie, dass es *keine* Konstante $C' > 0$ gibt, so dass $\|f\|_\infty \leq C'\|f\|_1$ für alle $f \in C([0,\, 1])$.

Aufgabe 7.4: (Kompakte Mengen)
Seien $(X,\, \mu)$ ein metrischer Raum und $A \subseteq X$ kompakt. Zeigen Sie, dass A abgeschlossen ist.

Hinweis: Fixieren Sie einen Punkt $x \in X \setminus A$ und betrachten Sie die offene Überdeckung $(B_{\varepsilon(y)}(y))_{y\in A}$ von A, wobei $\varepsilon(y) := \frac{1}{2}\mu(x,\, y) > 0$ für $y \in A$. Zeigen Sie dass $B_\varepsilon(x) \subseteq X \setminus A$ für $\varepsilon := \min\{\, \varepsilon(y_1),\, \ldots,\, \varepsilon(y_n) \,\} > 0$, falls $A \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} B_{\varepsilon(y_k)}(y_k)$ für $n \in \mathbb{N}$ und $y_1,\, \ldots,\, y_n \in A$.