

# Analysis II

## Sommersemester 2026

### Übungsblatt 8

Mathematisches Institut  
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf  
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Ausgabe: Di., 02.06.2026, 14:00 Uhr  
Abgabe: Di., 09.06.2026, 18:00 Uhr  
Besprechung: Mi., 10.06.2026 bzw. Do., 11.06.2026

ⓑ **Aufgabe 8.1:** (Stetigkeit, 2 + 2 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Funktionen  $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  auf Stetigkeit:

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases} \quad g(x, y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

*Bemerkung:* Die Funktionen  $f(x, \cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $f(\cdot, y) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sind für alle  $x, y \in \mathbb{R}$  stetig.

ⓑ **Aufgabe 8.2:** (Stetigkeit, 2 Punkte)

Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben als

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Zeigen Sie, dass  $f$  nicht stetig ist im Punkt  $(0, 0)$ . Zeigen Sie weiter, dass für jedes  $v \in \mathbb{R}^2$  mit  $|v| > 0$  die Funktion  $g_v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $g_v(t) := f(tv)$  für  $t \in \mathbb{R}$  stetig ist bei  $t = 0$ .

**Aufgabe 8.3:** (Stetigkeit der Norm)

Seien  $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  und  $(X, \|\cdot\|)$  ein normierter Raum über  $\mathbb{F}$ .

(a) Zeigen Sie, dass

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|, \quad x, y \in X.$$

(b) Zeigen Sie, dass  $\|\cdot\| : X \rightarrow [0, \infty)$  stetig ist bzgl.  $\|\cdot\|$  und  $|\cdot|$ .

(c) Zeigen Sie, dass für  $n \in \mathbb{N}$  die Menge  $S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$  kompakt ist in  $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ .

ⓑ **Aufgabe 8.4:** (Banach'scher Fixpunktsatz, 3 + 3 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Gleichung  $x^5 + 7x - 1 = 0$  genau eine Lösung  $x \in [0, 1]$  hat.

(b) Sei  $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  gegeben als  $g(x) := x + \frac{1}{1+x}$  für  $x \geq 0$ . Zeigen Sie, dass

$$|g(x) - g(y)| < |x - y|, \quad x, y \geq 0, x \neq y,$$

und, dass  $g$  keinen Fixpunkt in  $[0, \infty)$  hat.

**Aufgabe 8.5:** (Banach'scher Fixpunktsatz)

Sei  $(X, \mu)$  ein vollständiger metrischer Raum, sei  $A \subseteq X$  abgeschlossen und sei  $f : A \rightarrow X$  stetig mit  $f(A) \subseteq A$ . Weiterhin sei  $f^n$  eine strikte Kontraktion für ein  $n \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie, dass genau ein Fixpunkt  $x^* \in A$  für  $f$  existiert.

*Hinweis:* Hierbei ist  $f^1 := f$ ,  $f^2 := f \circ f$  und (rekursiv) für  $n \in \mathbb{N}$  ist  $f^{n+1} := f \circ f^n$ . Beachten Sie, dass dies wegen der Bedingung  $f(A) \subseteq A$  zu wohldefinierten, stetigen Abbildungen  $f^n : A \rightarrow X$  führt mit  $f^n(A) \subseteq A$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Nutzen Sie aus, dass  $f^n$  für ein  $n \in \mathbb{N}$  die Voraussetzungen des Banach'schen Fixpunktsatzes erfüllt.

Zusatz: Geben Sie ein Beispiel an für einen vollständigen metrischen Raum  $(X, \mu)$ , eine abgeschlossene Menge  $A \subseteq X$  und eine stetige Funktion  $f : A \rightarrow X$  mit  $f(A) \subseteq A$ , so dass  $f^2$  eine strikte Kontraktion ist,  $f$  jedoch nicht.