Analysis II
Sommersemester 2026
Übungsblatt 9

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Ausgabe:	Di., 09.06.2026, 14:00 Uhr
Abgabe:	Di., 16.06.2026, 18:00 Uhr
Besprechung:	Mi., 17.06.2026 bzw. Do., 18.06.2026

Ⓑ **Aufgabe 9.1:** (Partielle Differenzierbarkeit, 3 Punkte)
Untersuchen Sie, an welchen Stellen die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad f(x,\, y) := y\sqrt{2x^2 + y^2}, \qquad (x,\, y) \in \mathbb{R}^2,$$

partiell differenzierbar ist und bestimmen Sie ggf. die partiellen Ableitungen.

Ⓑ **Aufgabe 9.2:** (Stetigkeit und partielle Differenzierbarkeit, 3 Punkte)
Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ aus Aufgabe 8.1, d. h.

$$f(x,\, y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,\, y) \neq (0,\, 0), \\ 0, & (x,\, y) = (0,\, 0), \end{cases} \qquad (x,\, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Zeigen Sie, dass f partiell differenzierbar ist in $\mathbb{R}^2$, und, dass die partiellen Ableitungen $\partial_x f,\, \partial_y f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ in keiner Umgebung von $(0,\, 0)$ beschränkt sind.

Ⓑ **Aufgabe 9.3:** (Richtungsableitungen und Differenzierbarkeit, $3 + 3$ Punkte)
Die Funktionen $f,\, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ seien gegeben als $f(0,\, 0) := g(0,\, 0) := 0$ und

$$f(x,\, y) := \frac{x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3}{x^2 + y^2}, \qquad g(x,\, y) := \frac{x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad (x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\, (0,\, 0)\,\}.$$

Für welche Richtungen $v \in \mathbb{R}^2$ mit $|v| = 1$ existieren die Richtungsableitungen $\partial_v f(0,\, 0)$ bzw. $\partial_v g(0,\, 0)$? Sind f bzw. g differenzierbar an der Stelle $(0,\, 0)$?

Aufgabe 9.4: (Stetigkeit und partielle Differenzierbarkeit)
Sei $n \in \mathbb{N}$, sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$, sei $x \in D^\circ$, sei $U \subseteq D$ eine Umgebung von x und sei $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$ partiell differenzierbar in U mit beschränkten partiellen Ableitungen $\partial_1 f,\, \ldots,\, \partial_n f : U \longrightarrow \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass f stetig ist an der Stelle x.

Hinweis: Verwenden Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung (in einer reellen Variablen).