Analysis II
Sommersemester 2026
Übungsblatt 10

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Ausgabe:	Di., 16.06.2026, 14:00 Uhr
Abgabe:	Di., 23.06.2026, 18:00 Uhr
Besprechung:	Mi., 24.06.2026 bzw. Do., 25.06.2026

Ⓑ **Aufgabe 10.1:** (Differenzierbarkeit und Ableitungen, $2+2$ Punkte)
Untersuchen Sie die folgenden Funktionen jeweils auf Differenzierbarkeit und bestimmen Sie ggf. die Ableitung.

(a) $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben als $g(x,\, y) := |(x,\, y)| = \sqrt{x^2+y^2}$ für $x,\, y \in \mathbb{R}$.

(b) $h : (0,\, \infty) \times (-\pi,\, \pi) \times (-\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben als

$$h(\rho,\, \lambda,\, \phi) := (\rho\cos(\lambda)\cos(\phi),\ \rho\sin(\lambda)\cos(\phi),\ \rho\sin(\phi)), \qquad \rho > 0,\ |\lambda| < \pi,\ |\phi| < \tfrac{\pi}{2}.$$

Bestimmen Sie in Teil (b) ggf. außerdem $\det h'(\rho,\, \lambda,\, \phi)$.

Ⓑ **Aufgabe 10.2:** (Kettenregel, $2+2$ Punkte)
Berechnen Sie jeweils $f'(x,\, y)$, $g'(u)$ bzw. $g'(u,\, v)$ und $(g \circ f)'(x,\, y)$ für alle $u,\, (v,)\, x,\, y \in \mathbb{R}$, wobei

(a) $f(x,\, y) := e^{xy}\cos(y)$ und $g(u) := (u+1,\ \sin(u))$ für $u,\, x,\, y \in \mathbb{R}$;

(b) $f(x,\, y) := (x^2 - y^2,\ 2xy)$ und $g(u,\, v) := (u^3 - 3uv^2,\ 3u^2v - v^3)$ für $u,\, v,\, x,\, y \in \mathbb{R}$.

Ⓑ **Aufgabe 10.3:** (Homogene Funktionen, 4 Punkte)
Seien $n \in \mathbb{N}$ und $f : \mathbb{R}^n \setminus \{\, 0 \,\} \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie: f ist genau dann positiv homogen vom Grad $\alpha \in \mathbb{R}$, d. h. es gilt

$$f(tx) = t^\alpha f(x), \qquad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\, 0 \,\},$$

wenn die Euler'sche Homogenitätsrelation $f'(x)x = \alpha f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\, 0 \,\}$ erfüllt ist.

Hinweis: Differenzieren Sie die obige Relation nach t.

Aufgabe 10.4: (Differenzierbarkeit und Richtungsableitungen)
Seien $m,\, n \in \mathbb{N}$, sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$, sei $x \in D^\circ$ und sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ differenzierbar an der Stelle x. Zeigen Sie, dass die Richtungsableitung $\partial_v f(x)$ für alle $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{\, 0 \,\}$ existiert mit $\partial_v f(x) = f'(x)v$.

Hinweis: Proposition 2.4.7 (b) darf hier nicht verwendet werden.

Aufgabe 10.5: (Mittelwertsatz)
Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben als

$$f(t) := (\cos(t),\, \sin(t))^\mathsf{T}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie, dass f stetig differenzierbar ist in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie weiterhin: Sind $a,\, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, dann existiert kein $\eta \in (a,\, b)$, so dass $f(b) - f(a) = f'(\eta)(b-a)$.

Hinweis: Zeigen Sie, dass die Gleichung $1 - \cos(\tau) = \frac{1}{2}\tau^2$ keine Lösung $\tau > 0$ hat.