Analysis II
Sommersemester 2026
Übungsblatt 11

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Ausgabe:	Di., 23.06.2026, 14:00 Uhr
Abgabe:	Di., 30.06.2026, 18:00 Uhr
Besprechung:	Mi., 01.07.2026 bzw. Do., 02.07.2026

Aufgabe 11.1: (Höhere partielle Ableitungen)
Bestimmen Sie für die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x,\, y,\, z) := x^2 \sin(y) - z$ sämtliche partielle Ableitungen $\partial^\alpha f(x,\, y,\, z)$ für $\alpha \in \mathbb{N}_0^3$ mit $|\alpha| \leq 3$.

Ⓑ **Aufgabe 11.2:** (Taylorpolynome, $3 + 3$ Punkte)
Bestimmen Sie jeweils das Taylorpolynom $\sum_{|\alpha|\leq 2} \frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha f(x)(y-x)^\alpha$ zweiten Grades um den Punkt x für

(a) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(u,\, v,\, w) := u^2 v^3 w^4$ für $u,\, v,\, w \in \mathbb{R}$ und $x = (1,\, 1,\, 1) \in \mathbb{R}^3$;

(b) $f : (0,\, \infty) \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(u,\, v) := (u^v,\, \sin(u+v))$ für $u,\, v \in \mathbb{R}$ mit $u > 0$ und $x = (1,\, 1) \in (0,\, \infty) \times \mathbb{R}$.

Aufgabe 11.3: (Lokale Extrema)
Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben als $f(x,\, y) = 2x^2 - 3xy^2 + y^4$ für $(x,\, y) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass f auf jeder Geraden durch $(0,\, 0)$ ein lokales Minimum an der Stelle $(0,\, 0)$ hat, und, dass die Funktion f *kein* lokales Extremum an der Stelle $(0,\, 0)$ hat.

Hinweis: Es ist zu zeigen, dass für jedes $v \in \mathbb{R}^2$ mit $|v| = 1$ die Funktion $t \mapsto f(tv) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ein lokales Minimum an der Stelle $t = 0$ hat, und, dass für jedes $\varepsilon > 0$ Stellen $(\xi,\, \eta),\ (\xi',\, \eta') \in B_\varepsilon(0,\, 0)$ existieren mit $f(\xi,\, \eta) < f(0,\, 0) < f(\xi',\, \eta')$.

Ⓑ **Aufgabe 11.4:** (Lokale Extrema, $3 + 3$ Punkte)
Untersuchen Sie die Funktionen $f,\, g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ auf lokale Extrema, wobei

$$f(x,\, y) := x^4 - 2x^2 + 2x^2y^2 - y^2, \qquad \text{und} \qquad g(x,\, y) := (x + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$$

für $x,\, y \in \mathbb{R}$.