

Analysis II

Sommersemester 2026

Übungsblatt 12

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Ausgabe: Di., 30.06.2026, 14:00 Uhr
Abgabe: Di., 07.07.2026, 18:00 Uhr
Besprechung: Mi., 08.07.2026 bzw. Do., 09.07.2026

Aufgabe 12.1: (Inverse Funktionen)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben als $f(x, y) := (x^2 - y^2, 2xy)$ für $x, y \in \mathbb{R}$.

- (a) Zeigen Sie, dass f stetig differenzierbar ist.
- (b) Bestimmen Sie alle Punkte $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ mit $\det f'(x, y) \neq 0$.
- (c) Zeigen Sie, dass zu jedem Punkt $(z, w) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ genau zwei Urbilder bzgl. f existieren.

Ⓑ Aufgabe 12.2: (Implizite Funktionen, 2 Punkte)

Zeigen Sie, dass es offene Umgebungen $U, V \subseteq \mathbb{R}$ von 1 bzw. von 0 gibt, so dass alle Lösungen $(x, y) \in U \times V$ der Gleichung

$$y^3 - x^2 + xy + 1 = 0$$

von der Form $y = \phi(x)$ mit einer stetig differenzierbaren Funktion $\phi : U \rightarrow V$ sind. Zeigen Sie weiter, dass ϕ beliebig oft differenzierbar ist und bestimmen Sie das Taylorpolynom von ϕ vom Grad 2 um $x = 1$.

Ⓑ Aufgabe 12.3: (Extrema, 4 Punkte)

Sei $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Ellipsoid

$$E := \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 1 \right\}$$

gegeben als $f(x, y, z) := x^2 - yz$ für $(x, y, z) \in E$. Bestimmen Sie $\min_E f$ und $\max_E f$.

Hinweis: Für eine geeignete Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^3$ ist $E = \|\cdot\|^{-1}\bar{B}_1(0)$. Insb. ist E kompakt. Weiterhin liefert diese Darstellung sofort eine Darstellung für E° und ∂E . Bestimmen Sie alle Kandidaten für lokale Extremalstellen von $f|_{E^\circ}$ und $f|_{\partial E}$.

Aufgabe 12.4: (Extrema unter Nebenbedingungen)

Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Quader mit Volumen 1.

- (a) Bestimmen Sie die minimale Oberfläche von Q .
- (b) Bestimmen Sie die minimale Oberfläche von Q nach Entfernung einer Seite.