

# Analysis II

## Sommersemester 2026

### Übungsblatt 13

Mathematisches Institut  
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf  
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Ausgabe: Di., 07.07.2026, 14:00 Uhr  
Abgabe: Di., 14.07.2026, 18:00 Uhr  
Besprechung: Mi., 15.07.2026 bzw. Do., 16.07.2026

#### Aufgabe 13.1: (Klassifikation gewöhnlicher Differentialgleichungen)

Betrachten Sie die folgenden Differentialgleichungen:

- |                                                  |                                                               |
|--------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|
| (a) $u''(t) = t^2 + u(t)^3$ ,                    | (b) $(u'(t) + u(t)^2)^3 = 1$ ,                                |
| (c) $u_1'(t) = u_2(t)$ und $u_2'(t) = -u_1(t)$ , | (d) $u(t) = u''(t)$ ,                                         |
| (e) $\exp(u'(t)) + \sin(u(t)) = 1$ ,             | (f) $\cos(t)u'(t) + \exp(t)u''(t) + \sin(t)u(t) = \cosh(t)$ . |

Klassifizieren Sie: Ist die Gleichung linear oder nicht linear, autonom oder nicht autonom, explizit oder implizit?

#### Ⓑ Aufgabe 13.2: (Anfangswertprobleme, 2 + 2 + 2 Punkte)

Bestimmen Sie für die folgenden Anfangswertprobleme jeweils eine Lösung  $u : J \rightarrow \mathbb{R}$  auf einem möglichst großen offenen Intervall  $J \subseteq \mathbb{R}$  mit  $0 \in J$  bzw.  $1 \in J$ .

- (a)  $tu'(t) = u(t) + t^2$  für  $t \in \mathbb{R}$  und  $u(1) = 1$ .  
(b)  $u'(t) = e^{u(t)} \cos(t)$  für  $t \in \mathbb{R}$  und  $u(0) = 0$ .  
(c)  $u'(t) = -e^{u(t)} \sin(t)$  für  $t \in \mathbb{R}$  und  $u(0) = 0$ .

#### Aufgabe 13.3: (Logistisches Wachstum)

Seien  $\alpha, \kappa > 0$ , sei  $0 < x < \kappa$  und sei  $u : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  eine Lösung der logistischen Wachstumsgleichung

$$u'(t) = \alpha u(t) \left(1 - \frac{u(t)}{\kappa}\right), \quad t \in \mathbb{R}, \quad u(0) = x.$$

Zeigen Sie, dass  $v : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty)$  mit  $v(t) := \frac{1}{u(t)}$  für  $t \in \mathbb{R}$  eine *lineare Differentialgleichung* löst. Bestimmen Sie diese Gleichung, bestimmen Sie  $v$  und bestimmen Sie damit  $u$ .

#### Aufgabe 13.4: (Affin lineare Substitution)

Seien  $J, J' \subseteq \mathbb{R}$  Intervalle, seien  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , sei  $f : J' \rightarrow \mathbb{R}$  stetig, sei  $\tau \in J^\circ$  und sei  $x \in \mathbb{R}$ , so dass  $ax + b\tau + c \in J'$ . Sei  $(u, I)$  eine lokale Lösung des Anfangswertproblems

$$u'(t) = f(au(t) + bt + c), \quad t \in J, \quad u(\tau) = x,$$

und sei  $v : I \rightarrow \mathbb{R}$  definiert als  $v(t) := au(t) + bt + c$  für  $t \in I$ . Zeigen Sie, dass  $(v, I)$  eine lokale Lösung zu einem Anfangswertproblem ist, dass mit Hilfe der Methode der *Trennung der Variablen* gelöst werden kann. Verwenden Sie diese Methode, um eine lokale Lösung  $(u, I)$  des Anfangswertproblems

$$u'(t) = (u(t) + t - 1)^2, \quad t \in \mathbb{R}, \quad u(0) = 1,$$

zu bestimmen auf einem möglichst großen Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$ .