

Analysis II

Sommersemester 2026

Übungsblatt 14

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Ausgabe: Di., 14.07.2026, 14:00 Uhr
Abgabe: Di., 21.07.2026, 18:00 Uhr
Besprechung: Mi., 22.07.2026 bzw. Do., 23.07.2026

- Ⓑ **Aufgabe 14.1:** (Exakte Differentialgleichungen, 3 Punkte)
Bestimmen Sie eine lokale Lösung (u, I) zum Anfangswertproblem

$$e^{-t} + 2u(t)u'(t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad u(0) = 1,$$

auf einem möglichst großen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

- Ⓑ **Aufgabe 14.2:** (Exakte Differentialgleichungen, 3 Punkte)
Bestimmen Sie eine lokale Lösung (u, I) zum Anfangswertproblem

$$3t^2 - \frac{u'(t)}{u(t)} = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \quad u(0) = 1,$$

auf einem möglichst großen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$.

Aufgabe 14.3: (Homogene Substitution)

Seien $J, J' \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle, so dass $0 \notin J$, sei $f : J' \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, sei $\tau \in J^\circ$ und sei $x \in \mathbb{R}$, so dass $\tau^{-1}x \in J'$. Sei (u, I) eine lokale Lösung des Anfangswertproblems

$$u'(t) = f\left(\frac{u(t)}{t}\right), \quad t \in J, \quad u(\tau) = x,$$

und sei $v : I \rightarrow \mathbb{R}$ definiert als $v(t) := t^{-1}u(t)$ für $t \in I$. Zeigen Sie, dass (v, I) eine lokale Lösung zu einem Anfangswertproblem ist, dass mit Hilfe der Methode der *Trennung der Variablen* gelöst werden kann. Verwenden Sie diese Methode, um eine lokale Lösung (u, I) des Anfangswertproblems

$$tu'(t) = te^{u(t)/t} + u(t), \quad t > 0, \quad u(1) = 0,$$

zu bestimmen auf einem möglichst großen Intervall $I \subseteq (0, \infty)$.

Aufgabe 14.4: (Lokale Lipschitzbedingung)

Sei $n \in \mathbb{N}$, sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : J \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig, so dass $f(t, \cdot) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenzierbar ist für alle $t \in J$ mit Ableitung $f'(t, \cdot) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$. Sei $(t, x) \mapsto f'(t, x) : J \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ stetig. Zeigen Sie, dass f eine lokale Lipschitzbedingung erfüllt.