

Analysis III

Wintersemester 2026/2027

Mathematisches Institut
Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Priv.-Doz. Dr. Matthias Köhne

Übungsblatt 1

Ausgabe: Di., 20.10.2026, 14:00 Uhr
Abgabe: Di., 27.10.2026, 18:00 Uhr
Besprechung: Mi., 28.10.2026 bzw. Do., 29.10.2026

Ⓑ **Aufgabe 1:** (Dynkinsysteme und σ -Algebren, 2 + 2 Punkte)

Seien $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$ und $\mathcal{G} := \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}\} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$.

(a) Bestimmen Sie das von $\mathcal{G}$ erzeugte Dynkinsystem $\delta(\mathcal{G})$.

(b) Bestimmen Sie die von $\mathcal{G}$ erzeugte σ -Algebra.

Ⓑ **Aufgabe 2:** (Semiringe, Ringe und σ -Algebren, 2 + 1 + 2 + 3 Punkte)

Sei $\Omega \neq \emptyset$. Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{S} := \{\emptyset\} \cup \{\{\omega\} : \omega \in \Omega\} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ist ein Semiring über Ω .

(b) $\mathcal{R} := \{A \subseteq \Omega : A \text{ ist endlich}\} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ist ein Ring über Ω .

(c) $\mathcal{A} := \{A \subseteq \Omega : A \text{ ist abzählbar oder } \Omega \setminus A \text{ ist abzählbar}\} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ist eine σ -Algebra über Ω .

(d) $\mathcal{R} = \rho(\mathcal{S})$ und $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{S}) = \sigma(\mathcal{R})$.

Aufgabe 3: (Spur- σ -Algebren)

Seien $\Omega \neq \emptyset$ und $\emptyset \neq B \subseteq \Omega$. Sei $\mathcal{A}$ eine σ -Algebra über Ω . Zeigen Sie, dass die *Spur- σ -Algebra*

$$\mathcal{A}|_B := \{A \cap B : A \in \mathcal{A}\}$$

tatsächlich eine σ -Algebra über B ist.

Aufgabe 4: (Die Borel- σ -Algebra $\mathcal{B}_n$)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Wählen Sie zwei der folgenden Aussagen und beweisen Sie diese:

(a) $\mathcal{B}_n = \sigma(\{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}^n, a_k \leq b_k \text{ für } k = 1, \dots, n\})$.

(b) $\mathcal{B}_n = \sigma(\{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}^n, a_k \leq b_k \text{ für } k = 1, \dots, n\})$.

(c) $\mathcal{B}_n = \sigma(\{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}^n\})$.

(d) $\mathcal{B}_n = \sigma(\{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}^n\})$.

(e) $\mathcal{B}_n = \sigma(\{[a, \infty) : a \in \mathbb{R}^n\})$.

(f) $\mathcal{B}_n = \sigma(\{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}^n\})$.

Hinweis: Verwenden Sie die in der Vorlesung gezeigten Aussagen (c) und (d) aus Prop. 1.1.31.