Mathematisches Institut
der Universität Düsseldorf
Prof. Dr. H. Ratschek

SS 2004
12.05.2004
Blatt 4

Übungen zu Analysis II

12. (2P) Sei E ein normierter Raum, $u \in E,\ t \in \mathbb{R}^{>0}$ und $V \subset E$ offen bzw. abgeschlossen. Man zeige, daß auch die Mengen

$$u + V \quad \text{und} \quad tV$$

offen bzw. abgeschlossen sind.

13. (3P) Für jede Teilmenge A eines normierten linearen Raumes X sei $\alpha(\mathrm{A}) = \overline{\mathring{\mathrm{A}}}$ und $\beta(\mathrm{A}) = \mathring{\overline{\mathrm{A}}}$.

    (a) Ist A offen, so gilt $\mathrm{A} \subset \alpha(\mathrm{A})$; ist A abgeschlossen, so gilt $\mathrm{A} \supset \beta(\mathrm{A})$.

    (b) Für jede Teilmenge A von X gilt:

    $$\alpha(\alpha(\mathrm{A})) = \alpha(\mathrm{A}) \quad \text{und} \quad \beta(\beta(\mathrm{A})) = \beta(\mathrm{A}).$$

    (Verwende (a).)

    (c) Konstruiere eine Teilmenge A von $\mathbb{R}$ derart, daß die folgenden Mengen paarweise verschieden sind:

    $$\mathrm{A},\ \mathring{\mathrm{A}},\ \bar{\mathrm{A}},\ \alpha(\mathrm{A}),\ \beta(\mathrm{A}),\ \alpha(\mathring{\mathrm{A}}),\ \beta(\bar{\mathrm{A}}).$$

14. (a) (2P)In einem normierten Vektorraum E und für eine Menge $S \subset E$ ist $\mathring{S}$ die größte offene Teilmenge von S (d.h. es gibt keine offene Menge $T \neq \mathring{S}$ mit $\mathring{S} \subset T \subset S$).

    (b) (1P) Zeigen Sie durch Rückführung auf a), daß $\bar{T}$ für eine Menge $T \subset E$ die kleinste abgeschlossene Obermenge von T ist.

Abgabe: Mittwoch, 19.05.2004, 9.30 Uhr