Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Wintersemester 2026–27

Heinrich Heine Universität Düsseldorf

Spezielle Themen: p-adische Liegruppen – Blatt 3

Besprechung bzw. Vorzeigen der Lösungen am 28.10.2026 in der Übungsstunde

Bitte bereiten Sie Aufgaben 3.1 und 3.2 verbindlich für die Übungsstunde vor, die weiteren Aufgaben 3.3 und 3.4 sind optional; allgemeine Informationen finden Sie auf
`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/AnalytischeGruppen_WS2627/`

Aufgabe 3.1 (2 Punkte)

(a) Zeigen Sie: Für die Frattiniuntergruppe eines direkten Produktes $G = A \times B$ gilt

$$\Phi(G) \subseteq \Phi(A) \times \Phi(B).$$

(b) Gilt in (a) sogar Gleichheit? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis. Überlegen Sie, wie maximale Untergruppen von G aussehen, die in der ersten Koordinate auf ganz A und in der zweiten Koordinate auf ganz B projezieren. Was passiert für endliche Gruppen und was passiert, wenn Shelah[1] Ihnen nun eine (unendliche) einfache Gruppe schenkt, die keine maximalen Untergruppen besitzt?

(c) Finden Sie eine endliche Gruppe G dergestalt, daß $\Phi(G)$ *nicht* vollinvariant in G ist.

Hinweis. Versuchen Sie es zum Beispiel mit Gruppen der Form $A \times B$, wobei $\Phi(B) = 1$ ist und sich A inklusive $\Phi(A) \neq 1$ in B einbetten läßt. Vielleicht für $A = D_8$ und $B = \mathrm{SL}(3, \mathbb{F}_2)$.

Aufgabe 3.2 (2 Punkte)

Sei p eine Primzahl. Zeigen Sie: Die Gruppe

$$G = \langle x, y \mid x^p = y^p = 1 \text{ und } [y, y^{x^i}] = 1 \text{ für } 1 \leq i < p \rangle.$$

ist eine endliche p-Gruppe der Ordnung $|G| = p^{p+1}$. Bestimmen Sie weiter die absteigende Zentralreihe und folgern Sie, daß G maximale Nilpotenzklasse p besitzt.

Aufgabe 3.3

Jede endliche abelsche Gruppe läßt sich bekanntlich als direkte Summe von zyklischen Gruppen der Form $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$, mit $p \in \mathbb{P}$ und $k \in \mathbb{N}$, schreiben. Diese Darstellung beschreibt die Gruppe eindeutig bis auf Isomorphie.

(a) Geben Sie eine allgemeine Formel für das Tensorprodukt $A \otimes_{\mathbb{Z}} B$ zweier abelscher Gruppen an, die Gebrauch von der besagten Zerlegung macht.

(b) Sei nun p eine fest gewählte Primzahl. Die Isomorphieklassen $[A]$ endlicher abelscher p-Gruppen A bilden unter der Bildung direkter Summen, $\oplus$, und der Bildung von Tensorprodukten, $\otimes$, einen kommutativen Halbring, der sich kanonisch in einen kommutativen Ring $\mathcal{A}_p$ einbettet. Erklären Sie diesen Sachverhalt und versuchen Sie, den resultierenden Ring $\mathcal{A}_p$ möglichst explizit zu beschreiben.

Aufgabe 3.4

(a) Sei K ein Körper. Bestimmen Sie, bis auf Isomorphie, alle K-Liealgebren L der Dimension $\dim_K(L) \leq 2$.

(b) Bestimmen Sie, bis auf Isomorphie, alle $\mathbb{Z}$-Liegitter vom Rang höchstens 2.

[1] Shelah, Saharon: On a problem of Kurosh, Jónsson groups, and applications (1980).