Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Wintersemester 2026–27

Spezielle Themen: p-adische Liegruppen – Blatt 4

Besprechung bzw. Vorzeigen der Lösungen am 4.11.2026 in der Übungsstunde

Bitte bereiten Sie Aufgaben 4.1 und 4.2 verbindlich für die Übungsstunde vor, die weiteren Aufgaben 4.3 und 4.4 sind optional; allgemeine Informationen finden Sie auf
`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/AnalytischeGruppen_WS2627/`

Aufgabe 4.1 (2 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring mit 1, und sei L eine R-Liealgebra.

(a) Seien $I, J \trianglelefteq L$ Lieideale. Zeigen Sie: Der R-Untermodul von L, der von allen Kommutatoren $[a, b]$ mit $a \in I$ und $b \in J$ erzeugt wird, ist bereits ein Lieideal $[I, J]$ in L.

(b) Sei $\eta\colon R \to K$ ein Homomorphismus zwischen kommutativen Ringen mit 1 (insbesondere gelte $1_R\eta = 1_K$), und betrachte K mittels η als R-Algebra. Erläutern Sie: Dann vermittelt η in natürlicher Weise auf $K \otimes_R L$ die Struktur einer K-Liealgebra.

Zusatz. Sind R und K Hauptidealringe und ist L ein R-Liegitter, folgt dann stets: $K \otimes_R L$ ist ein K-Liegitter?

(c) Finden Sie $\mathbb{Z}$-Liegitter L_1, L_2 mit $L_1 \not\cong L_2$, aber $\mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} L_1 \cong \mathbb{Q} \otimes_{\mathbb{Z}} L_2$.

Aufgabe 4.2 (2 Punkte)

(a) Sei $L = Ka_1 \oplus Ka_2$ ein 2-dimensionaler Vektorraum über einem Körper K. Bestimmen Sie „Strukturkonstanten“ $c_{i,j}^k \in K$, für $1 \le i, j, k \le 2$, dergestalt, daß zwar

$$c_{i,i}^k = 0 \quad \text{und} \quad \sum_{l=1}^2 c_{i,j}^l c_{l,k}^m + \sum_{l=1}^2 c_{j,k}^l c_{l,i}^m + \sum_{l=1}^2 c_{k,i}^l c_{l,j}^m = 0 \qquad \text{für } 1 \le i, j, k, m \le 2$$

gelten, aber auf L durch die Festlegung $[a_i, a_j] = \sum_{k=1}^2 c_{i,j}^k a_k$ *keine* Liealgebrenstruktur vermittelt wird.

(b) Sei $d \in \mathbb{N}$ und $L = \mathfrak{sl}_d(\mathbb{Z})$ das $\mathbb{Z}$-Liegitter der spurlosen $d \times d$-Matrizen über $\mathbb{Z}$. Bestimmen Sie die Strukturkonstanten für L bezüglich der naheliegenden $\mathbb{Z}$-Basis.
Hinweis. Beginnen Sie mit $d = 2$ und der Basis $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(c) Seien p eine Primzahl, $d \in \mathbb{N}$ und $L = \mathfrak{sl}_d(\mathbb{F}_p)$ die $\mathbb{F}_p$-Liealgebra der spurlosen $d \times d$-Matrizen über dem endlichen Körper $\mathbb{F}_p$. Finden Sie hinreichende und notwendige Bedingungen dafür, daß L perfekt ist, d. h., $[L, L] = L$ gilt.

Aufgabe 4.3

Sei R ein kommutativer Ring mit 1, und sei $F = \langle x_1, x_2 \ldots, x_r \rangle$ eine freie R-Liealgebra von endlichem Rang r. Sei $w \in F$ ein Liewort, in dem jede Variable x_i genau einmal vorkommt; z. B. $w = [[x_1, [x_2, x_3]], [x_4, x_5]] + [x_6, [[x_7, x_8], [x_9, x_{10}]]]$ für $r = 10$.

Sei L eine beliebige R-Algebra. Zeigen Sie: Der R-Untermodul von L, der von

$$\{w\varphi \mid \varphi\colon F \to L \text{ ein Homomorphismus zwischen } R\text{-Liealgebren}\}$$

erzeugt wird, ist bereits gleich dem von w vermittelten Liewortideal in L.

Aufgabe 4.4

Sei φ ein Automorphismus der Ordnung 3 einer $\mathbb{C}$-Liealgebra L. Zeigen Sie: Ist $\mathrm{C}_L(\varphi) = \{a \in L \mid a\varphi = a\}$ gleich $\{0\}$, so ist L nilpotent mit $\gamma_3(L) = \{0\}$.