Prof. Dr. Benjamin Klopsch
Wintersemester 2026–27

Spezielle Themen: p-adische Liegruppen – Blatt 8

Besprechung bzw. Vorzeigen der Lösungen am 02.12.2026 in der Übungsstunde

Bitte bereiten Sie Aufgaben 8.1 und 8.2 verbindlich für die Übungsstunde vor, die weiteren Aufgaben 8.3, 8.4 und 8.5 sind optional; allgemeine Informationen finden Sie auf

`http://reh.math.uni-duesseldorf.de/~internet/AnalytischeGruppen_WS2627/`

Durchweg bezeichne $p \in \mathbb{P}$ eine Primzahl.

Aufgabe 8.1 (2 Punkte)

Sei G eine endliche p-Gruppe für $p > 2$, und seien $M, N \trianglelefteq G$.

(a) Zeigen Sie: Ist $N \leq_{\text{p.e.}} G$ und $i \in \mathbb{N}_0$, so ist $N^{p^i} \leq_{\text{p.e.}} G$.

(b) Zeigen Sie: Ist $[N, M] \leq_{\text{p.e.}} N$, so gilt $[N^p, M] = [N, M]^p$.

(c) Zeigen Sie: Sind $M, N \leq_{\text{p.e.}} G$, so ist $[N, M] \leq_{\text{p.e.}} N$.

(d) Zeigen Sie: Sind $M, N \leq_{\text{p.e.}} G$ und $i, j \in \mathbb{N}_0$, so gilt $[N^{p^i}, M^{p^j}] = [N, M]^{p^{i+j}}$.

Hinweise. Beachten Sie die Sätze 5.3 und 5.6 der Vorlesung sowie die zugehörigen Beweise; argumentieren Sie in (d) per Induktion nach $i + j$.

Aufgabe 8.2 (2 Punkte)

Sei G eine pro-endliche Gruppe. Zeigen Sie für den *Rang* von G:

$$\begin{aligned}\operatorname{rk}(G) := \sup\{d(H) \mid H \leq_{\text{abg}} G\} &= \sup\{d(H) \mid H \leq_{\text{abg}} G \text{ und } d(H) < \infty\} \\ &= \sup\{d(H) \mid H \leq_{\text{off}} G\} \\ &= \sup\{\operatorname{rk}(G/N) \mid N \trianglelefteq_{\text{off}} G\}.\end{aligned}$$

Aufgabe 8.3

Sei $r \in \mathbb{N}$ und $G = U(r, \mathbb{F}_p) \leq \mathrm{GL}(r, \mathbb{F}_p)$ die Gruppe der oberen Dreiecksmatrizen mit Einträgen 1 auf der Diagonalen.

(a) Zeigen Sie: G ist eine Sylow-p-Untergruppe von $\mathrm{GL}(r, \mathbb{F}_p)$.

(b) Bestimmen Sie explizit die Frattinireihe $G = \Phi^0(G) \geq \Phi^1(G) \geq \ldots$, die rekursiv durch $\Phi^{i+1}(G) = \Phi(\Phi^i(G))$ definiert ist.

Zusatz. Bestimmen Sie für $n = p^m$, mit $m \in \mathbb{N}$, eine Sylow-p-Untergruppe G der symmetrischen Gruppe $\mathrm{Sym}(n)$. Untersuchen Sie entsprechend die zugehörige Frattinireihe.

Aufgabe 8.4

Sei G eine endliche p-Gruppe für $p > 2$. Seien $s = s(G) = \max\{d(\Phi^i(G)) \mid i \geq 0\}$ und $\lambda(s) = \lceil \log_2 s \rceil$.

(a) Zeigen Sie: $W = \Phi^{\lambda(s)}(G)$ ist potenzreich und $|G : W| \leq p^{s\lambda(s)}$

(b) Folgern Sie: $\operatorname{rk}(G) \leq s(\lambda(s) + 1)$.

Aufgabe 8.5

Finden Sie, ggf. durch Benutzung geeigneter Computer-Algebra-Software,[1] für $p > 2$ eine endliche p-Gruppe mit $G^{p^2} \subsetneq (G^p)^p$.

[1] z. B. MAGMA (Online Calculator); siehe `http://magma.maths.usyd.edu.au/calc/`