Mathematisches Institut
Heinrich-Heine Universität Düsseldorf
Dr. Alexander Bentkamp, Jon Eugster

WiSe 2023/24
17. Oktober 2023

Computer-gestützte Beweisführung

Übungsblatt 1

Aufgabe 1. Seien a und f Konstanten. Nutzen Sie unsere Konventionen zur Notation von λ-Termen, um die folgenden Terme mit so wenig Klammern und λs wie möglich zu schreiben:

(a) $(\lambda x.\ (x\ (\lambda u.(((u\ x)\ x)\ \mathsf{a}))))$
(b) $(\mathsf{f}\ (\lambda x.\ (\lambda y.\ (\lambda z.\ (y\ y))\ (((x\ z)\ \mathsf{a})))))$

Lösung.

(a) $\lambda x.\ x\ (\lambda u.\ u\ x\ x\ \mathsf{a})$
(b) $\mathsf{f}\ (\lambda x\ y.\ (\lambda z.\ y\ y)\ (x\ z\ \mathsf{a}))$

Aufgabe 2. Welche der folgenden Terme sind α-äquivalent zu $\lambda x.\ (\lambda x.\ x)\ x$?

(a) $\lambda x.\ (\lambda y.\ y)\ x$
(b) $\lambda y.\ (\lambda x.\ y)\ y$
(c) $\lambda y.\ (\lambda x.\ x)\ y$
(d) $\lambda x.\ x$

Lösung. (a) und (c)

Aufgabe 3. Konstruieren Sie jeweils einen λ-term t, sodass

(a) $t \equiv t\ t$
(b) $t\ t \equiv t\ t\ t$

Lösung.

(a) $t = \lambda x.\ x$
(b) $t = \lambda x.\ x\ x\ x$

Aufgabe 4. Die Church-Booleans sind eine Kodierung der Booleans *true* und *false*. Wir bezeichnen im Folgenden den λ-Term $\lambda x\ y.\ x$ als *true* und den λ-Term $\lambda x\ y.\ y$ als *false*. Geben Sie λ-Terme an, die die folgenden Boolschen Operationen kodieren:

(a) *Nicht.* Gesucht ist also ein λ-Term t, sodass $t\ \mathit{true} \equiv \mathit{false}$ und $t\ \mathit{false} \equiv \mathit{true}$.
(b) *Und.* Gesucht ist also ein λ-Term t, sodass $t\ \mathit{true}\ \mathit{true} \equiv \mathit{true}$, $t\ \mathit{true}\ \mathit{false} \equiv \mathit{false}$, $t\ \mathit{false}\ \mathit{true} \equiv \mathit{false}$ und $t\ \mathit{false}\ \mathit{false} \equiv \mathit{false}$.

Lösung.
(a) $\lambda b.\ b\ (\lambda x\ y.\ y)\ (\lambda x\ y.\ x)$ oder $\lambda b\ x\ y.\ b\ y\ x$
(b) $\lambda u\ v.\ u\ v\ u$ oder $\lambda u\ v.\ u\ v\ (\lambda x\ y.\ y)$ oder $\lambda u\ v\ x\ y.\ u\ (v\ x\ y)\ y$

Aufgabe 5.
(a) Zeigen Sie, dass für den λ-Term $Y = \lambda y.\ (\lambda x.\ y\ (x\ x))\ (\lambda x.\ y\ (x\ x))$ und für jeden beliebigen λ-Term t gilt, dass $t\ (Y\ t) \equiv Y\ t$.
(b) Geben Sie einen λ-term s an, sodass $s \equiv \lambda x.\ x\ s\ x$. (Tipp: Verwenden Sie $s = Y\ t$ für einen geeigneten λ-Term t und den λ-Term Y aus Teil (a))

Lösung.
(a)

$$\begin{aligned}
t\ (Y\ t) &\equiv t\ ((\lambda y.\ (\lambda x.\ y\ (x\ x))\ (\lambda x.\ y\ (x\ x)))\ t) && \text{Def. von } Y\\
&\equiv t\ ((\lambda x.\ t\ (x\ x))\ (\lambda x.\ t\ (x\ x))) && \beta\text{-Äquivalenz}\\
&\equiv (\lambda z.\ t\ (z\ z))\ (\lambda x.\ t\ (x\ x)) && \beta\text{-Äquivalenz}\\
&\equiv (\lambda x.\ t\ (x\ x))\ (\lambda x.\ t\ (x\ x)) && \alpha\text{-Äquivalenz}\\
&\equiv (\lambda y.\ (\lambda x.\ y\ (x\ x))\ (\lambda x.\ y\ (x\ x)))\ t && \beta\text{-Äquivalenz}\\
&\equiv Y\ t && \text{Def. von } Y
\end{aligned}$$

(b) Wir folgen dem Tipp und setzen $s = Y\ t$ für ein noch zu bestimmendes t. Wir suchen also einen Term t, sodass $Y\ t = s \equiv \lambda x.\ x\ s\ x = \lambda x.\ x\ (Y\ t)\ x$. Aus Teil (a) wissen wir, dass $Y\ t \equiv t\ (Y\ t)$. Ein geeignetes t ist also $t = \lambda z.\ \lambda x.\ x\ z\ x$. Dann haben wir:

$$\begin{aligned}
s &\equiv Y\ t && \text{Def. von } s\\
&\equiv t\ (Y\ t) && \text{nach (a)}\\
&\equiv (\lambda z.\ \lambda x.\ x\ z\ x)\ (Y\ t) && \text{Def. von } t\\
&\equiv \lambda x.\ x\ (Y\ t)\ x && \beta\text{-Äquivalenz}\\
&\equiv \lambda x.\ x\ s\ x && \text{Def. von } s
\end{aligned}$$

Ausgeschrieben lautet der Term:

$$s = (\lambda y.\ (\lambda x.\ y\ (x\ x))\ (\lambda x.\ y\ (x\ x)))\ (\lambda z.\ \lambda x.\ x\ z\ x)$$

Abgabe: 24. Oktober 2023, bis 16.30 Uhr auf Ilias
(Oder bei technischen Problemen per Email an `jon.eugster@hhu.de`)
Abgabe zu zweit ist erlaubt.