Mathematisches Institut
Heinrich-Heine Universität Düsseldorf
Dr. Alexander Bentkamp, Jon Eugster

WiSe 2023/24
7. November 2023

Computer-gestützte Beweisführung

Übungsblatt 3

Aufgabe 1. Sind die folgenden Terme wohlgetypt im einfach getypten λ-Kalkül? Wenn ja, geben Sie den Typ des Terms an und ergänzen Sie den Typ jeder durch λ gebundenen Variable. (Sie brauchen hier keine Typderivation aufschreiben.) Hierbei seien A ein Basistyp und $\mathsf{f} : \mathsf{A} \to \mathsf{A}$, $\mathsf{g} : \mathsf{A} \to \mathsf{A} \to \mathsf{A}$, $\mathsf{h} : (\mathsf{A} \to \mathsf{A}) \to \mathsf{A}$ und $\mathsf{a} : \mathsf{A}$ Konstanten.

(a) $(\lambda x.\, \mathsf{g}\ x\ x)\ (\mathsf{f}\ \mathsf{a})$
(b) $\lambda x.\, x\ x$
(c) $(\lambda y.\, \lambda x.\, y\ x)\ \mathsf{g}\ \mathsf{a}$
(d) $(\lambda x.\, \mathsf{f}\ (x\ \mathsf{a}))\ (\lambda x.\, \mathsf{f}\ (\mathsf{h}\ x))$

Aufgabe 2. Sei Nat ein Basistyp und seien $2 : \mathsf{Nat}$, $3 : \mathsf{Nat}$, $\mathsf{add} : \mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat}$ Konstanten. Erstellen Sie eine Typderivation des Terms $(\lambda x : \mathsf{Nat}.\ \mathsf{add}\ x\ 2)\ 3$ im einfach getypten λ-Kalkül.

Aufgabe 3. Sei $\mathsf{Nat} : \mathsf{Type}$ eine Konstante. Geben Sie eine Typderivation im Calculus of Inductive Constructions für den folgenden Term an:

$$\lambda A : \mathsf{Type}.\ \Pi B : \mathsf{Type}.\ \mathsf{Nat} \to A \to B$$

Aufgabe 4. Definieren Sie folgende Funktionen im Sinne von Abschnitt 3.4 des Skripts:

(a) Eine Funktion $\mathsf{mul} : \mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat} \to \mathsf{Nat}$, die zwei natürliche Zahlen multipliziert. (Tipp: Nutzen Sie die Funktion add aus dem Skript.)
(b) Eine Funktion $\mathsf{length} : \Pi\{X : \mathsf{Type}\}.\ \mathsf{List}\ X \to \mathsf{Nat}$, die die Länge einer Liste zurückgibt.

Bitte wenden!

Aufgabe 5. Wie im Skript in Abschnitt 3.4 beschrieben, bringt die Definition von add auf den natürlichen Zahlen folgende definitionelle Gleichheiten mit sich: $\mathsf{add}\ s\ \mathsf{zero} \equiv s$ und $\mathsf{add}\ s\ (\mathsf{succ}\ t) \equiv \mathsf{succ}\ (\mathsf{add}\ s\ t)$ für beliebige Terme s und t. Welche der folgenden definitionellen Gleichheiten gelten für eine Variable $x : \mathsf{Nat}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

(a) $\mathsf{add}\ (\mathsf{succ}\ x)\ \mathsf{zero} \equiv \mathsf{succ}\ x$
(b) $\mathsf{add}\ \mathsf{zero}\ (\mathsf{succ}\ x) \equiv \mathsf{succ}\ (\mathsf{add}\ \mathsf{zero}\ x)$
(c) $\mathsf{add}\ \mathsf{zero}\ (\mathsf{succ}\ x) \equiv \mathsf{succ}\ x$
(d) $\mathsf{add}\ (\mathsf{succ}\ x)\ (\mathsf{succ}\ \mathsf{zero}) \equiv \mathsf{succ}\ (\mathsf{succ}\ x)$
(e) $\mathsf{add}\ (\mathsf{succ}\ \mathsf{zero})\ (\mathsf{succ}\ x) \equiv \mathsf{succ}\ (\mathsf{succ}\ x)$
(f) $\mathsf{zero} \equiv (\mathsf{id}\ \mathsf{add})\ \mathsf{zero}\ \mathsf{zero}$

Abgabe: 14. November 2023, bis 16.30 Uhr auf Ilias
(Oder bei technischen Problemen per Email an `jon.eugster@hhu.de`)
Abgabe zu zweit ist erlaubt.